

# Brilliant Pattern 光輝的圖案

彰化女中 郭志玲、黃巧璇、呂侑臻

## 題目研析（問題說明、動機與目的）

### 一、探究題目

#### 光輝的圖案（Brilliant pattern）

Suspend a water drop at the lower end of a vertical pipe. Illuminate the drop using a laser pointer and observe the pattern created on a screen.

將水滴懸掛在垂直管子的下端(如磨平的注射針頭)。使用雷射筆照亮水滴，並觀察在後方屏幕上造成的光線分布圖案。研究並解釋這些現象。

### 二、問題說明(Problem Statement)

#### （一）分析題目訊息

1. lower end of a vertical pipe→實驗裝置條件：水滴於注射針頭下端
2. illuminate the drop by laser pointer → 用雷射筆照射水珠
3. observe the pattern created on a screen → 觀察分析(前後方)屏幕上光線圖案並解釋成因

#### （二）訂定研究議題

研究雷射光在照射水珠後，在前、後屏幕上所呈現的光線圖案及其成因，並針對各變因(1. 水滴大小、2. 偏移入射光束及 3. 水滴與成像屏幕間距)所得位於前、後屏幕的光線圖案成像上差異進行探討。

### 三、研究動機(Motivation of Investigation)

在講義中學到物理及幾何光學的物理知識，而老師更提到光經過水珠後的現象及相關的自然景象，勾起了我們的興趣，也順勢勾起了我的回憶，在小時每當於大太陽底下澆花噴水霧時，便會看到彩虹，然而其由虹、霓及複虹所構成，而此項研究更對應到了過去IYPT (全球青年物理辯論錦標賽的相關題目)，我們便從課本加以延伸連結，積極加強自身能力深入研究並以英文簡報方式呈現成果，除此之外，有趣的是虹與此次實驗皆需光及小水霧或水珠相互構成，於是我們更藉由自主學習的機會一探究竟其相似或相異，並加強STEM能力。

### 四、研究目的(Purposes of Investigation)

- (一) 觀察並分析光線圖案成因
- (二) 觀察並分析水滴大小對光線圖案於前&後屏幕上成像的影響
- (三) 觀察並分析偏移入射光束對光線圖案於前&後屏幕上成像的影響
- (四) 觀察並分析水滴與成像屏幕間距對成像圖案於前&後屏幕上的影響
- (五) 模擬計算理論數值與實驗值作比較，並且模擬光線在水滴的折射反射情形

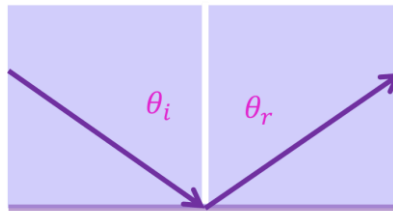
## 科學原理(THEORY)

### 一、科學概念

#### (一) 反射(Refecction)：

波陣面從一個介質進入另一個介質時，在兩個介質的界面處，其傳播方向發生改變，而返回其原介質的現象。遵守以下三點：

1. 反射光線、入射光線和反射面在反射發生處的法線位於同一個平面。
2. 反射角等於入射角
3. 反射光線和入射光線處在法線的相對兩邊。



#### (二) 折射率(refractive index)：

當光從一種媒介移動到另一種媒介時，它會改變方向，在光學中，材料的折射率是一個無量剛常數，描述光在材料中傳播的速度。定義如下：

$$n = \frac{c}{v}$$

為「光在真空中速度(c)」與「光在介質中速度(v)」之比值水的折射率是1.3330

#### (三) 斯乃爾定律(Snell's Law):

發射角和折射角度的sin比例相當於光速於兩種介質速度的比率，或相當於折射率的比值，可得下列式：

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$\theta$  為從邊界的正常角度測量

$n$  為折射率

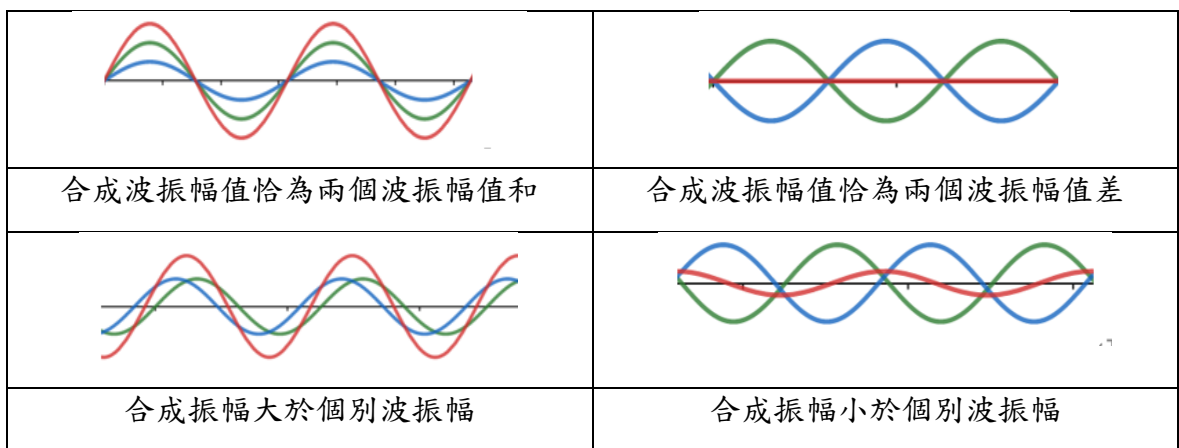
#### (四) 干涉(Optical interferometry)

##### (1) 相長干涉(建設性干涉constructive interference):

兩波重疊產生干涉，若合成的振幅大於每個波的振幅時，稱為相長干涉。如果為同相干涉時，合成波的振幅值恰為兩個波振幅值的和，則合成波得到最大的振幅，稱為完全相長干涉。

##### (2) 相消干涉(破壞性干涉destructive interference):

兩波重疊產生干涉，若合成的振幅小於每個波的振幅時，稱為相消干涉。如果為反相干涉時，合成波的振幅值恰為兩個波振幅值的差，則合成波得到最大的振幅，稱為完全相消干涉。



圖(一)(藍綠線為各自的獨立波，紅線為合成波)

#### (五) 繞射(Diffraction)

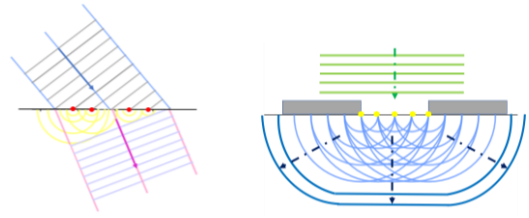
波在穿過狹縫、小孔或圓盤之類的障礙物後會發生不同程度的彎散傳播。假設將一個障礙物置放在光源和觀察屏之間，則會有光亮區域與陰暗區域出現於觀察屏，而且這些區域的邊界並不銳利，是一種明暗相間的複雜圖樣。

##### 惠更斯-菲涅耳原理(Huygens - Fresnel principle):

波前的每一點發出次波，這些次波互相干涉，疊加形成新的波前，從每一個光學系統特徵的菲涅耳數，可以辨別光波傳播的區域是近場還是遠場。設想光波入射於任意孔徑，對於這光學系統，菲涅耳數定義為

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^2}{L\lambda}$$

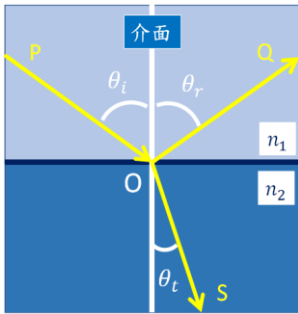
a: 是孔徑的尺寸  
L: 孔徑與觀察屏之間的距離  
 $\lambda$ : 入射波的波長



假若  $F > 1$ ，則繞射波是處於近場，可以使用菲涅耳繞射積分式來計算其物理性質。

### (六) 菲涅耳方程式(Fresnel equations):

當光從一種折射率為  $n_1$  的介質向另一種折射率為  $n_2$  的介質傳播時，在兩者的交界處（通常稱作界面）可能會同時發生光的反射和折射。菲涅爾方程式描述了光波的不同分量被折射和反射的情況，也描述了波反射時的相變。



$$R_s = \left[ \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 = \left( \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_2} \right)^2$$

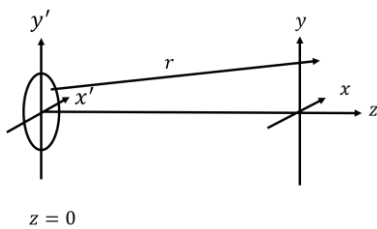
$$= \left[ \frac{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i\right)^2}}{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i\right)^2}} \right]^2$$

圖(二)

### (七) 菲涅耳繞射：近場繞射(Fresnel diffraction: Near-field diffraction)

繞射屏相距光源及觀察點兩者或兩者之一為有限遠子波源點與場點的幾何關係，而光強分佈與場點到繞射屏的距離及波面形狀有關，可在繞射屏後較近距離處觀察，當波穿過近場的光圈和繞射時，根據光圈和投影之間的距離，觀察到的任何繞射模式在大小和形狀上都有所不同

繞射幾何，顯示光圈（或衍射物件）平面和圖像平面，配有座標系。



$$E(x, y, z) = \frac{z}{i\lambda} \iint E(x', y', 0) \frac{e^{ikr}}{r^2} dx' dy'$$

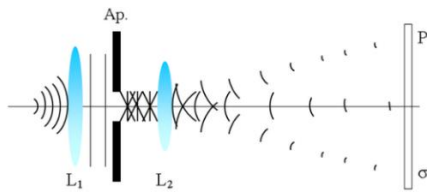
$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$$

$$E(x, y, z) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda z} \iint E(x', y', 0) e^{\frac{ik}{2z} [(x - x')^2 + (y - y')^2]} dx' dy'$$

圖(三)

(八) 夫朗和斐繞射：遠場繞射 (Fraunhofer diffraction: Far-field diffraction)

若  $F \ll 1$ ，則繞射波是處於遠場，則為遠場繞射，而為課內所提之繞射，夫朗和斐繞射假設造成繞射的狹縫和屏幕距離很遠，可視為無限遠的情況，假如一光源與觀察用的屏幕離繞射圓孔（狹縫）足夠遠的話，到達圓孔及屏幕的波前可被視為準直或平面波。



$$d \sin \theta = n\lambda$$

- d= 狹縫距離
- $\theta$ = 入射角
- n= 第 n 條紋
- $\lambda$ = 入射光波長

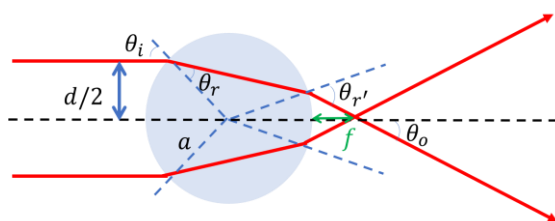
(from Wikiwand)圖(四)

二、理論和原理&物理模型

2.1 由幾何光學觀點探討雷射光束進入水滴之後的折射結果：

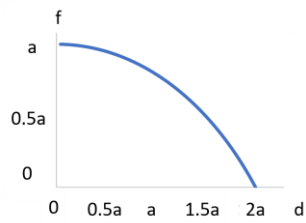
由於雷射光束直徑大於水滴直徑，所以照到水滴的雷射光會因水的折射率大於空氣而使得光束兩次偏折，一次為光徑從空氣進入水滴，一次為光徑從水滴出道空氣，最後於在屏幕上呈現放大的圓形明亮區域。此因較外圍的雷射光束沒有照射到水滴使雷射直接投射在屏幕上呈一小圈較亮的圓環

水滴如同放大鏡，將入射的雷射光束放大，這是由於光在空氣與水滴交界面產生折射所造成的結果。圖（五）清楚顯示了光線在水滴與空氣交界處的折射現象，光束在距離水滴  $f$  處聚焦，經過聚焦點之後即漸漸發散。藉由折射定律與幾何的分析可推得入射光線位置與光線聚焦位置的關係式：



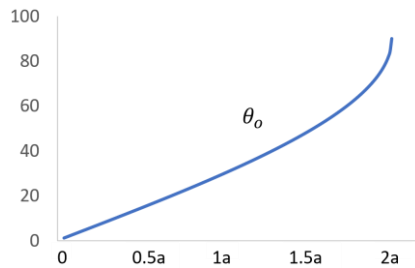
- 水滴半徑： $a$
- 雷射光束直徑： $d$
- 光線由空氣進入水滴的入射角： $\theta_i$
- 光線由空氣進入水滴的折射角： $\theta_r$
- 光線由水滴射出空氣的折射角： $\theta_r'$
- 發散半角： $\theta_o$

圖（五）



$$f = a \left[ \cos(2\theta_r - \theta_i) + \frac{\sin(2\theta_r - \theta_i)}{\tan(2\theta_i - 2\theta_r)} - 1 \right]$$

光線進入水滴的位置( $da=0\sim 2$ )與折射後光線聚焦點位置( $f$ )的關係圖。



光線進入水滴的位置( $d=0\sim 2a$ )與折射後光線發散角( $\theta_o$ )的關係圖。

其中 $\sin(\theta_i) = d/2a$ 。

橫軸表示光線入射水滴的位置，縱軸表示聚焦點距離水珠表面的距離。

若光束大於水滴，則必須考慮 $da \leq 2$ 的所有情形，因此聚焦點的分布會從水滴表面延續至距離水滴表面 $a$ 處。進一步亦可得到發散半角( $\theta_o$ 與光束直徑的關係 $\theta_o = 2(\theta_r - \theta_i)$ )，如(圖五)所示。然而若考慮雷射光束的強度為高斯分布，實際上的發散角僅會侷限於約35度以內，與實驗結果的發散角約為33度相當符合。

## 2.2-1 直接反射及進反射與折射的現象

光行進遇到介質不同的交界面時，除了會有折射，也會有反射的光。

1. 探討雷射光束照到水滴而直接反射的光 (如圖(六)與水平入射光夾 $\theta_1$ 的粉光)
2. 光折射進入水滴之後，在水滴內分別反射一次及兩次，最後再折射出空氣的光 (如圖(六)與水平入射光夾 $\theta_2$ 的紫光和夾 $\theta_3$ 的粉光)。

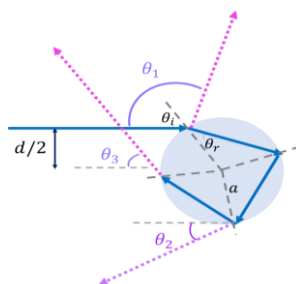
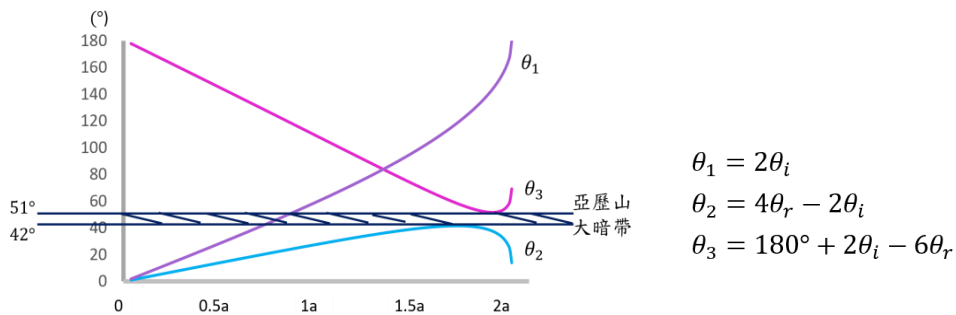


圖 (六)

多次反射及折射的光在屏幕上形成絢麗的干涉條紋,而屏幕最終呈現了接近水滴狀的明亮區域,且佈滿清晰的干涉條紋,若使雷射光對稱地射入水滴,這些干涉條紋就會在水滴兩側對稱地分布。利用反射定律、折射定律、幾何關係來解析圖(七)中各角度與入射光束的關係計算分析後得以下關係式:而 $\sin(\theta_i)=d/2a$



圖(七)顯示雷射照射到水滴而直接反射的光( $\theta_1$ 紫)、一次反射兩次折射( $\theta_2$ 藍)、兩次反射兩次折射( $\theta_3$ 粉)與入射光線位置( $d=0\sim 2a$ )的關係圖。

$\theta_1$ : 紫色線表示越接近水滴中心照射水滴,其反射角度越小(接近0度),反之越遠離水滴中心,其反射角度越大(接近180度)。

$\theta_2$ : 藍色線代表光線在水滴內一次反射兩次折射的光,其角度分布為0度到42度之間,極限觀測角約42度,也正為產生虹的最大角度

$\theta_3$ : 粉色線代表的光線在水滴內兩次反射兩次折射的光,其角度分布為180度到51度之間,極限觀測角約51度,也正為產生霓的最小角度這樣的結果說明了圖七實驗干涉條紋的形成及位置。

在42度到51度之間一次反射兩次折射的光和兩次反射兩次折射的光正好都沒有射入此範圍,所以看起來較暗。但因還有第一次反射光,所以還不至於全暗,此暗帶稱為亞歷山大暗帶。

除了幾何光學分析光線的位置之外,重要的是必須將光的波動特性納入考量,波的干涉是造成絢麗斑圖的主要原因,而必須有至少兩道光波的振幅線性疊加之下才會產生干涉現象的產生



## 2.2-2干涉條紋現象

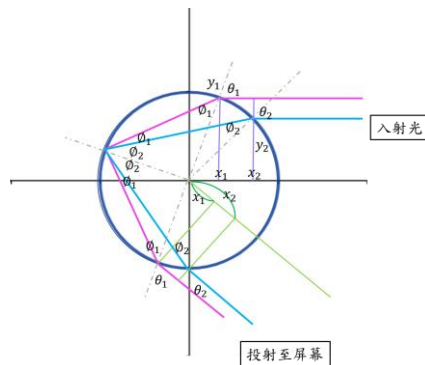
以兩道與圓心不同垂直距離、具有相同觀測角的平行光來說明，已知雷射光為同調光源，令水滴半徑為 $r$ ，在兩光束打入圓形水滴之前，就會產生光程差，其光程差為

$$x_2 - x_1 = r(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

最後射出水滴時又再一次產生了光程差，其光程差的距離與入射水滴前光程差的距離相同為 $x_2 - x_1$ ，所以兩道光束從雷射光射出至投射到屏幕全部的光程差為

$$2r(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) + n \times 4r(\cos \phi_1 - \cos \phi_2)$$

其中 $n$ 為水的折射率。當光程差為波長的整數倍時即為完全建設性干涉也就是紋，若為半波長的奇數倍時，即為完全破壞性干涉也就是暗紋。



:兩次折射一次反射模擬圖

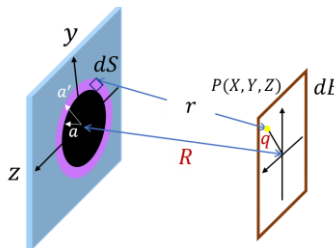
## 2.3 探討雷射光經過水滴邊緣所產生的繞射現象。

此為幾何光學無法解釋的現象。若雷射光束直徑比水滴直徑大，則大於水滴的光會發生繞射現象，在水珠正後方形成繞射條紋且正中心會是亮紋。

水滴正後方的中心處確實為一亮點。海更斯原理說明了波陣面上的每一點可以看做是產生球面子波的一個次級擾動中心，而以後任何時刻的波陣面則可看作是這些次級子波的包絡。

將雷射光束經過水滴邊緣近似為一平面波經過圓形的障礙物，如圖(八)所示。會有繞射的部分只有接近水滴邊緣部分的光，因此可將此部分光 $dS$ 在遠方屏幕上的貢獻 $dE$ 寫成下方式子：

經過近場繞射近軸近似計算之後，再經過積分，可得距離水滴  $R$  的屏幕上光場分布，即是屏幕上由繞射現象造成的光場分布，其中 $J_0$ 是第零階貝索 (Bessel function) 函數。然而水滴越小，繞射條紋越疏；水滴越大，繞射條紋越密。



$$dE = \frac{\epsilon_A}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS \leftarrow$$

$$|E| = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kr)}}{R} \iint_{\text{out of aperture}} e^{ik(Yy + Zz)/R} dS \leftarrow$$

$$E = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kr)}}{R} 2\pi(a' - a) J_0\left(\frac{kaq}{R}\right) \leftarrow$$

$$I = \frac{2\epsilon_A^2 \pi (a' - a)^2}{R^2} \left[ J_0\left(\frac{kaq}{R}\right) \right]^2 \leftarrow$$

$\epsilon_A$  : 單位面積光源強度  
 $\omega$  : 角頻率  
 $k$  : 波數

繞射現象來源示意圖，黑色區域為半徑為  $a$  的水滴 (障礙物)，會造成繞射的是半徑  $a \sim a'$  之間的紅色圓環

# 實驗設計

## 一、變因(Parameter)

- (一) 水滴大小
- (二) 偏移入射光束
- (三) 水滴與成像屏幕間距

## 二、依據變因提出研究問題

- (一) 水滴大小對前屏幕所產生之波紋圖案間距及密度的影響？
- (二) 偏移入射光束是否會影響前屏幕及後屏幕所呈現的光線圖案不同？
- (三) 水滴與成像屏幕間距是否影響其類波紋圖案間距及密度的影響？

## 三、針對研究問題提出假設(Assumption)

### (一) 水滴大小(Diameter of droplets)

水滴的直徑越大，亦即水滴及雷射光束直徑之比值越大，其成像波紋間距應變小，且單位距離間之亮紋數增加

### (二) 偏移入射光束(Distance of Offset)

比較射光束直射水滴中心及偏移其打到水滴上的入射點：直射時應繞射條紋的中心會位在水滴的正後方

### (三) 水滴與成像屏幕間距(Distance between droplet and Screen)

水滴與成像屏幕間距越大，亮紋位置也會距中心越遠，密度降低

## 四、針對研究假設計實驗

### (一) 水滴大小(Diameter of droplets)

依大會所提供的針頭樣式，改變水滴分別為，觀察其現象

## (二) 偏移入射光束(Distance of Offset)

用本實驗測量裝置改變其橫軸位置，使水滴和雷射光的相對於橫軸的中心距離分別為，觀察其現象

## (三) 水滴與成像屏幕間距(Distance between droplet and Screen)

用本實驗測量裝置改變水滴及屏幕間距離，此距離分別為，觀察其現象

# 五、確定實驗組與控制組

## (一) 水滴大小(Diameter of droplets)

1. 控制變因：雷射光為紅光、雷射光直射水滴中心、水滴與成像屏幕間距16.5公分
2. 操縱變因：水滴大小分別直徑0.898 mm, 1.658 mm, 2.036 mm, 2.675 mm, 2.990 mm, 3.211 mm
3. 應變變因：前屏幕波紋間距、密度

## (二) 偏移入射光束(Distance of Offset)

1. 控制變因：水滴大小2.511mm
2. 雷射光為紅光、水滴與成像屏幕間16.5公分
3. 操縱變因：雷射光束的偏移方位分別為直射、偏上、偏下、偏左、偏右
4. 應變變因：前屏幕光線走向

## (三) 水滴與成像屏幕間距(Distance between droplet and Screen)

1. 控制變因：水滴大小2.657mm、雷射光為紅光、雷射光直射水滴中心
2. 操縱變因：水滴與成像屏幕間距分別為16.5 cm, 12.5 cm, 8.5 cm, 4.5 cm
3. 應變變因：前屏幕亮紋對中心距

# 六、敘述器材的架設與測量

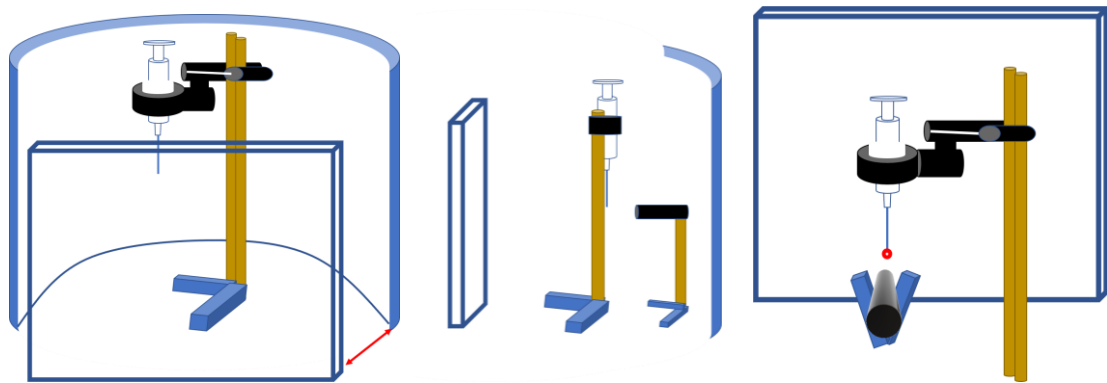
## (一) 實驗器材(Experimental Setup)

1. 文具(透明膠帶、塑膠捲尺、細字簽字筆、剪刀、方格紙)

2. 固定用具(擴展夾、強力黏土、木圓棒、平頭針組合、彩色衣夾、調整式束帶)
3. 中空板(→屏幕)
4. 雷射筆
5. 5cc針筒

## (二) 實驗設置(Structure of Experimental Setup)

1. 成像屏幕位置：分為與入射光同向及與入射光反向兩種方向
2. 實驗架設圖及說明



在此實驗中會有兩個方向之屏幕，其中一屏幕為平的，而一屏幕為半圓形，水滴位置會垂直於半圓形屏幕之圓心處，雷射光架設於與半圓形屏幕同向(亦即會在半圓形屏幕上打洞而使雷射光束穿過去)，會在水滴前後皆架設屏幕是由於我們發現雷射光經兩次折射穿過水滴會於前方產生光的波紋，而雷射光若經過兩次折射一次反射即會產生光的波紋於後方屏幕，我們欲探討於前後屏幕產生的波紋。

## (三) 實驗步驟與測量方法(Experimental Process & Measurement)

1. 實驗方法及步驟
  - (1) 架設好實驗裝置
  - (2) 利用材料包所附的彩色衣夾固定雷射筆位置
  - (3) 用針筒擠出水滴

在進行實驗中發現，在控制水滴大小除了擠出水滴之外，亦可回拉製造出更小的水滴。

#### (4)將雷射光束對準水滴中心

實驗中發現，若雷射光偏移，則光束直接透過呈於屏幕上的亮光會與亮光的干涉中心位置不一樣，可利用此現象進行雷射光束射入位置的校正，並確認雷射光束與屏幕是垂直的。而我們也將此現象納入變因當中，進行探討。

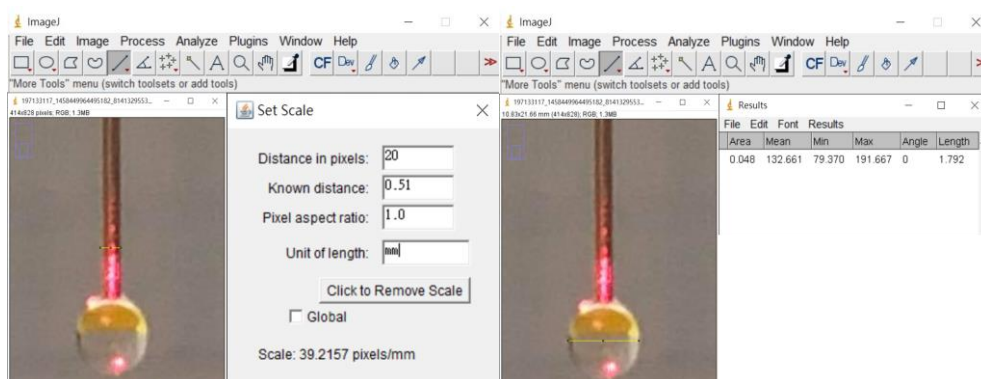
#### (5)進行拍攝

實驗中的照片由數位相機拍攝，拍攝設定將曝光補償的部分調低，使能更清晰地拍攝到屏幕上的成像，直接拍攝到水通常會有過曝的現象發生，因水滴會反射雷射光，因此實驗照片皆從旁邊進行拍攝。

### 2. 基本測量

#### (1)距離：水滴及屏幕間距離以塑膠捲尺進行測量

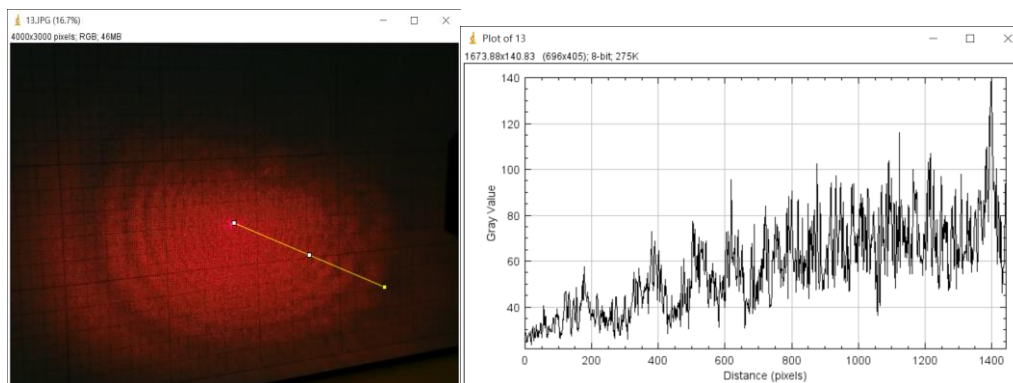
#### (2)水滴直徑：利用imageJ測量



測量方法為以注射針頭的外徑(0.51 mm)作為標準尺，再測量水滴直徑，圖中之結果為1.792 mm，其他水滴大小亦由相同方法測量。

### 3. 實驗數據取得

#### (1)利用imageJ進行影像分析:計算亮紋數量，並以光強度分析輔助計算



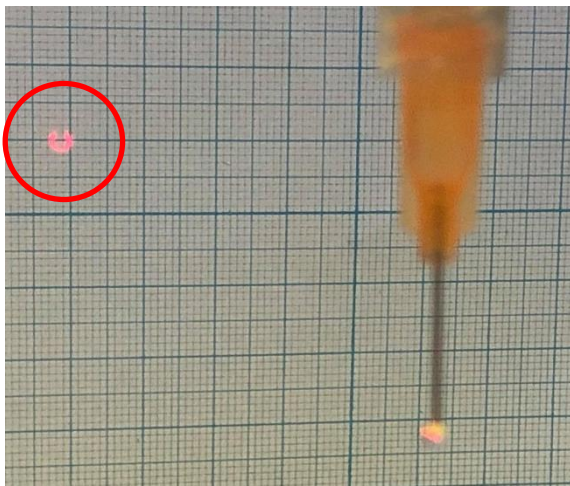
#### (2)利用屏幕上所貼方格紙的刻度進行測量:利用方格紙的刻度確定長度間亮紋數量

## 實驗結果與分析

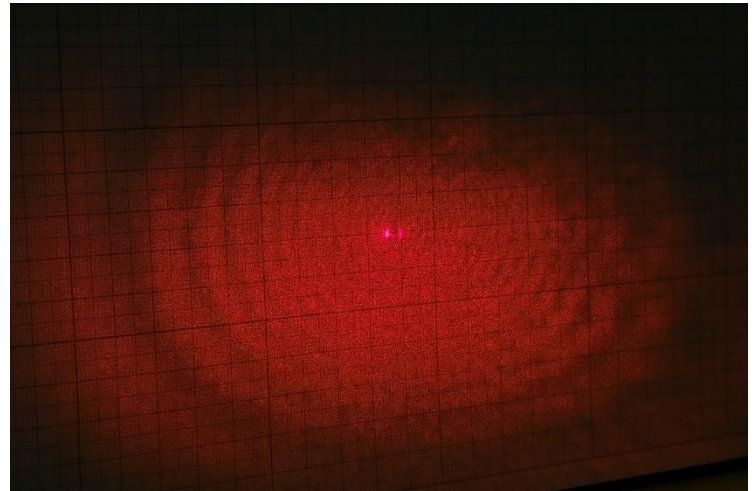
### 一、現象觀察及分析

此報告的實驗主要以前屏幕的現象為主，並探討各項變因對現象的影響，由於後方屏幕也會有因折射反射干涉產稱的現象出現，讓我們相當有興趣，因此對前後屏幕現象皆進行了觀察分析以及原理探討。

#### (一)前屏幕之現象



圖(九)



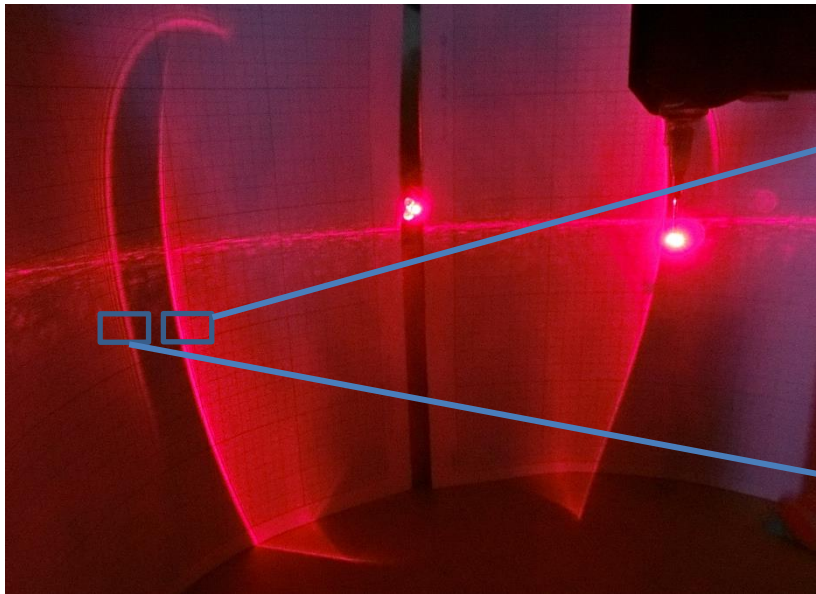
圖(十)

圖(九)及圖(十)皆為雷射光直射水滴後在屏幕的成像圖(九)，雷射光的直徑是大於水滴的直徑，因此未通過水滴的光束會直接打在前方的屏幕上形成一個光環，此圖的拍攝條件是在雷射筆快要沒電的情況下，由於在雷射筆有電時，其所形成的光環肉眼可見但拍攝時會過曝，因此當雷射筆快要沒電時反而可以明顯地拍攝下光環的這一個現象。

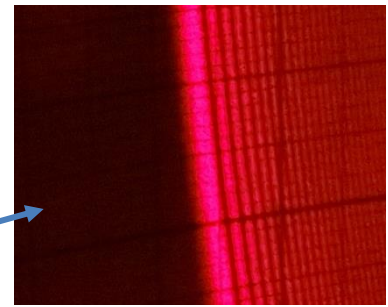
圖(十)，雷射光的直徑一樣是大於水滴的直徑，未通過水滴的光束直接打在前方的屏幕，且水滴邊緣的光因光程差會相互干涉在水珠後方形成干涉條紋且正中心會是亮紋。



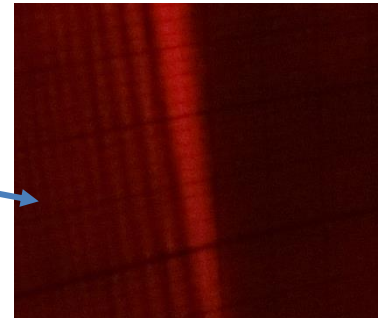
## (二)後屏幕之現象



圖(十一)



圖(十二)



圖(十三)

從雷射光至到圖(十二)區域為干涉條紋，且圖(十二)區域邊緣距離水滴中心的角度約為42度。(b)區與(c)區中間則出現一暗帶(即亞歷山大暗帶)，直到角度約為51度。

實驗結果在屏幕上約52度之外的圖(十三)區域的干涉條紋分布是照射到水滴後直接反射的光與反射兩次折射兩次的光疊加之下所產生的結果。然而42度至51度中間的暗帶為只有照到水滴後直接反射的光，因此無法與其他光形成干涉條紋，造成雖然有光但卻相對地微弱。42度及51度這兩個特殊角度就是跟彩虹會出現的角度一樣，虹是出現在仰角42度，霓則出現在仰角51度。

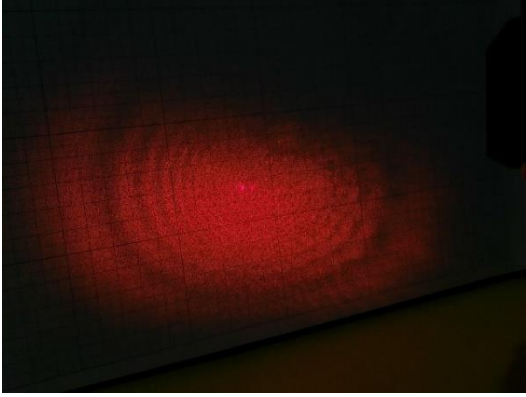

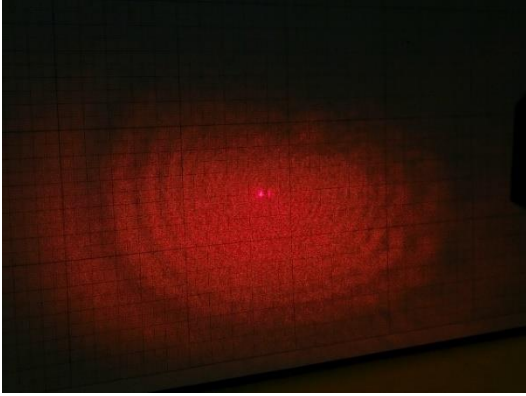

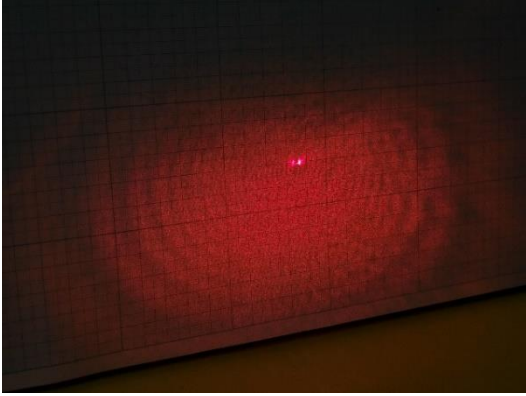

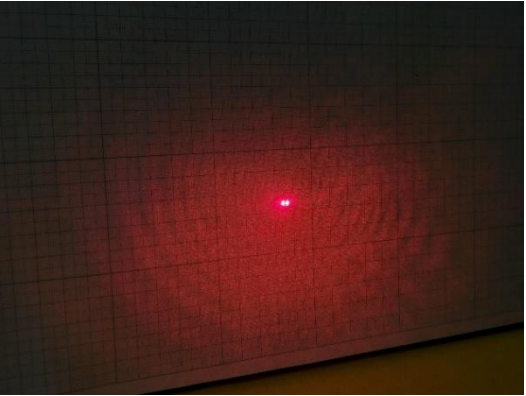

## 二、實驗變因及結果

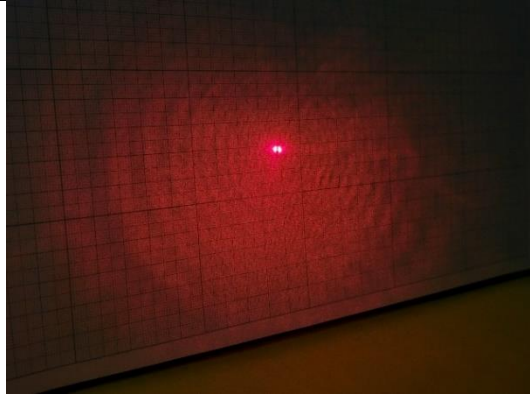

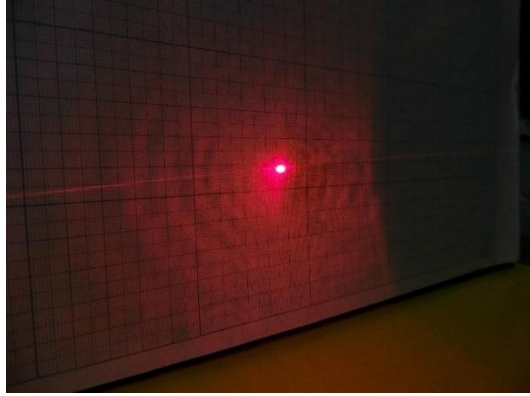

### (一)實驗一：水滴大小

控制變因：雷射光為紅光、雷射光直射水滴中心、水滴與成像屏幕間距16.5公分

操縱變因：水滴大小分別為直徑0.898mm, 1.658mm, 2.036mm, 2.675mm, 2.990mm, 3.211mm

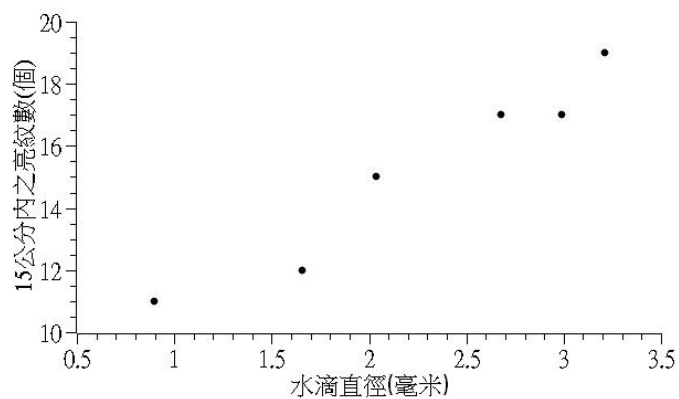


前屏幕上成像	亮紋數	水滴
	<p>可見總亮紋數：19</p> <p>距干涉中心15公分內之亮紋數：19</p>	 <p>水滴直徑3.211mm</p>
	<p>可見總亮紋數：17.5</p> <p>距干涉中心15公分內之亮紋數：17</p>	 <p>水滴直徑2.990mm</p>
	<p>可見總亮紋數：18</p> <p>距干涉中心15公分內之亮紋數：17</p>	 <p>水滴直徑2.675mm</p>
	<p>可見總亮紋數：17</p> <p>距干涉中心15公分內之亮紋數：15</p>	 <p>水滴直徑2.036mm</p>

	<p>可見總亮紋數：15</p> <p>距干涉中心15公分內之亮紋數：12</p>	 <p>水滴直徑1.658mm</p>
	<p>可見總亮紋數：11</p> <p>距干涉中心15公分內之亮紋數：11</p>	 <p>水滴直徑0.898mm</p>

表(一) 水滴直徑間距對15公分內亮紋數作圖

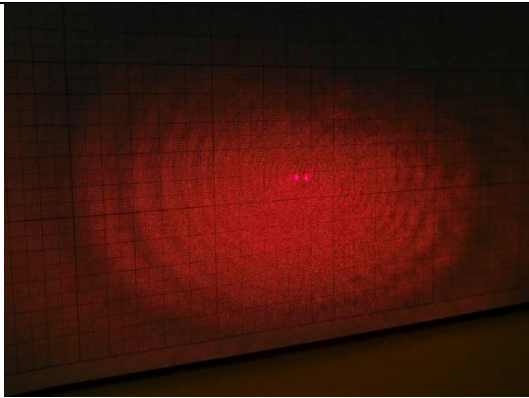
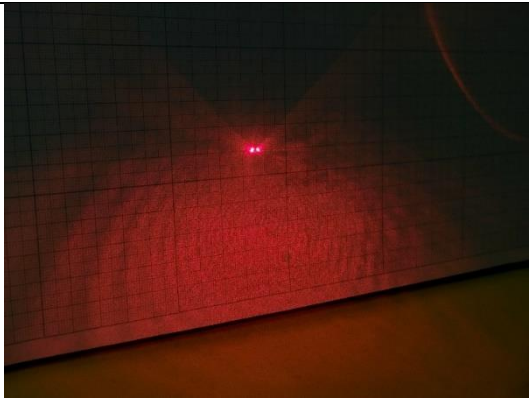
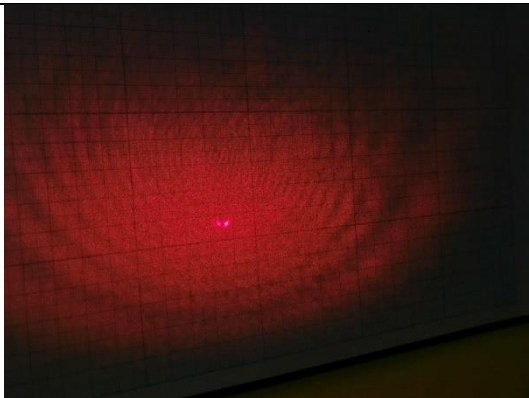
由變因二的結果可知，水滴的直徑與特定距離內亮紋數成正相關，水滴的直徑越大，亦即水滴及雷射光束直徑之比值越大，其成像波紋間距應變小，且單位距離間之亮紋數增加，干涉條紋越密。而此結果與我們於理論探討的結論是相同的。

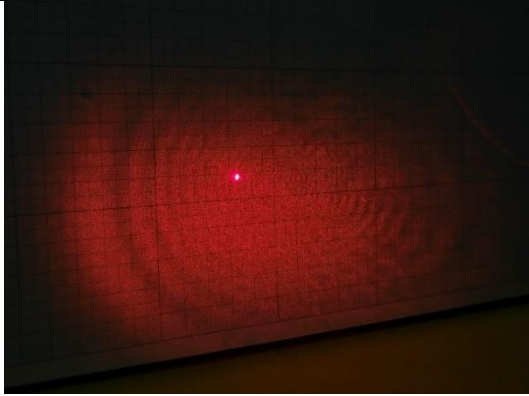
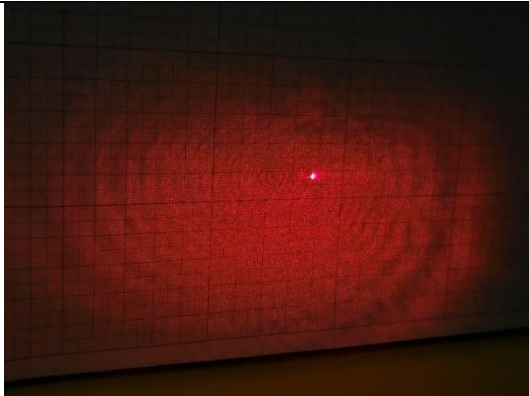


(二)實驗二：偏移入射光束

控制變因：水滴大小2.511mm、雷射光為紅光、水滴與成像屏幕間距16.5公分

操縱變因：雷射光束的偏移方位分別為直射、偏上、偏下、偏左、偏右

雷射光束的偏移方位	成像
直射水滴	
光束偏上	
光束偏下	

<p>光束偏左</p>	
<p>光束偏右</p>	

在以上的圖中皆可看到未通過水滴的光束直接打在前方的屏幕的亮光，以及時這些光束會在水珠後方形成干涉條紋，透過直接打在屏幕上的亮光可以判斷雷射光束是直射或偏向上或下或左或右，而從圖中可以發現：

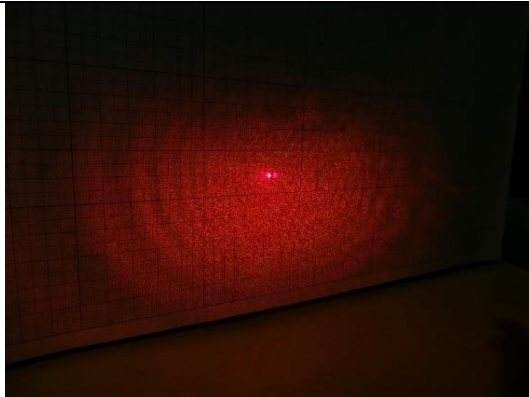
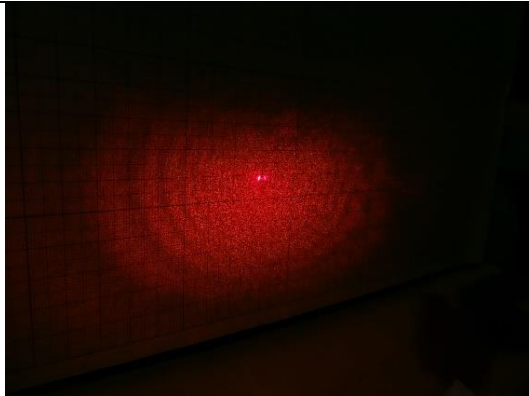
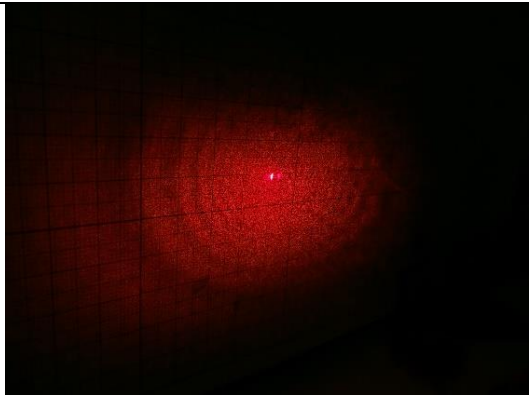
- 1、若雷射光束直射，則干涉條紋的中心會與亮光重疊
- 2、若雷射光束偏上，則干涉條紋的中心會位於亮光下方
- 3、若雷射光束偏下，則干涉條紋的中心會位於亮光上方
- 4、若雷射光束偏左，則干涉條紋的中心會位於亮光右方
- 5、若雷射光束偏右，則干涉條紋的中心會位於亮光左方

進行干涉的光由水滴邊緣的光組成，有通過水滴的光會產生折射，使成像為倒立實像，而折射部分的光徑如同理論部分所提到，因此此實驗結果亦符合我們理論所探討的。而此現象也可作為雷射是否有從水滴中心射入的依據，有助於提高實驗的準確性。

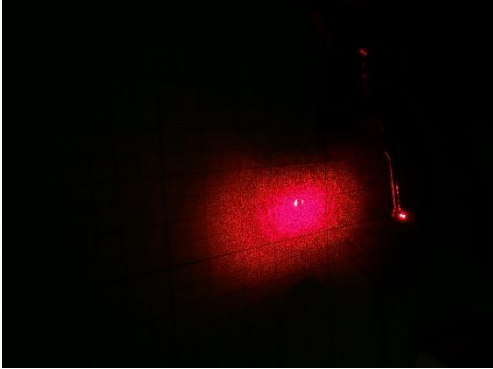
(三)實驗三：水滴與成像屏幕間距

控制變因：水滴大小2.657mm、雷射光為紅光、雷射光直射水滴中心

操縱變因：水滴與成像屏幕間距分別為16.5cm, 12.5cm, 8.5cm, 4.5cm

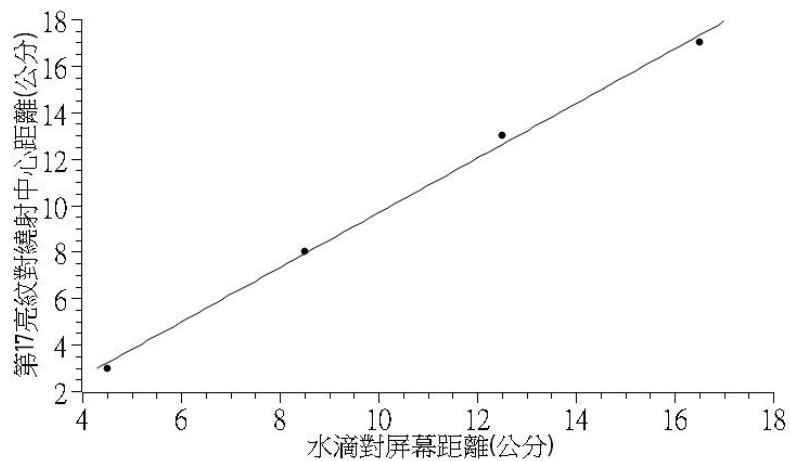
水滴與 成像屏幕間距	成像	第17個亮紋對中心距離
16.5cm		約17公分(中心至第17個 亮紋最外側)
12.5cm		約13公分(中心至第17個 亮紋最外側)
8.5cm		約8公分(中心至第17個 亮紋最外側)



4.5cm		約3公分(中心至第17個亮紋最外側)
-------	---	--------------------

表(二) 水滴和屏幕間距對亮紋位置

根據干涉公式可以得知，亮紋位置(即中心點至第N個亮紋的距離)會與狹縫(在此實驗中即為水滴位置)成正比，我們將水滴和屏幕間距對亮紋位置作圖，並以線性函數進行擬合，得出擬合函數為 $y = 1.175x - 2.0875$ ，十分接近正比。



## 誤差分析(Analysis)

### 一、誤差探討

- (一) 水滴並非正圓球狀，而以圓球狀為基礎的理論模型過度簡化其現象原理。
- (二) 水滴懸掛在針頭下方時，因質量小易受環境的微擾造成水滴形狀的改變，雖然是微小的改變，但相較於雷射光束的波長而言，已足夠形成光程差造成亮暗紋的變化。
- (三) 雷射光束強度過強時，可能造成折射投影數增加使實驗亮暗紋間不分明或者過度曝光。
- (四) 雷射未準確從水滴正中央射入即會造成實驗誤差，實驗二便是在探討若未精準從水滴中心處可能發生的現象。
- (五) 計算亮紋數時，由於越靠近中心亮紋數越密集，可能會有計算上的誤差，如多算一條或少算一條。
- (六) 測量亮紋距離時，未有一個準確邊界，可能造成些許誤差，如實驗三中在計算亮紋對中心距離時便有此情況發生，繞射公式中亮紋位置與狹縫和屏幕距離成正比，而亮紋較準確位置應位於整條亮紋中心處，我們推測實驗三中所擬合出來的線性函數與理論上的正比有些許偏差與此有關。

### 二、誤差修正

- (一) 在理論公式中加入修正因子進行校正。
- (二) 在一個接密閉空間的環境做實驗，減少空氣流動造成的水滴形變。
- (三) 使用適當雷射光強度，以清晰觀測實驗現象。
- (四) 以imageJ校正入射點位置，確認雷射光從水滴正中心射入。
- (五) 以imageJ測量光度變化，確認亮紋確切位置。

# 結論 Conclusion

## 一、結果到結論

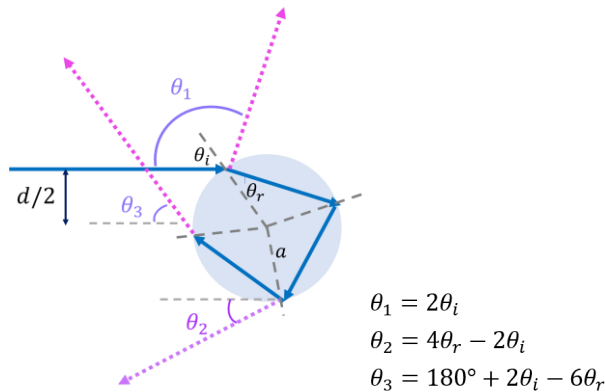
(一) 成像原理包含光的反射、折射、干涉及繞射。

(二) 雷射光束直徑大於水滴直徑，水的折射率大於空氣而使得光束兩次偏折，一次為光徑從空氣進入水滴，一次為光徑從水滴出到空氣，光束在距離水滴  $f$  處聚焦，且經過聚焦點之後即漸漸發散

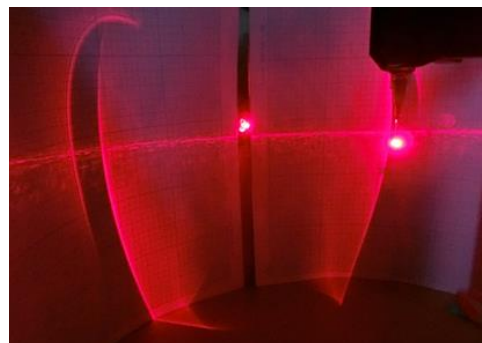
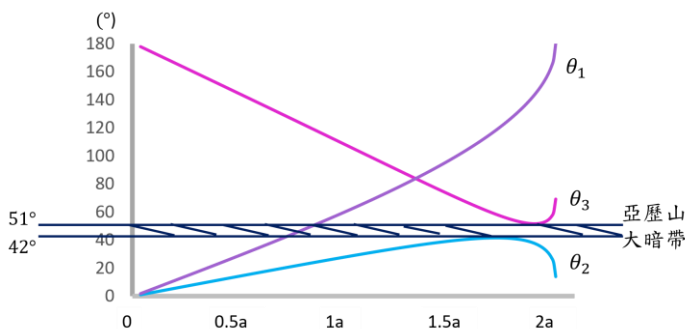


$$f = a \left[ \cos(2\theta_r - \theta_i) + \frac{\sin(2\theta_r - \theta_i)}{\tan(2\theta_i - 2\theta_r)} - 1 \right]$$

(三) 光行進遇到介質不同的交界面時，有折射和反射的光。分成直接反射的光和一次反射兩次折射及兩次反射兩次折射

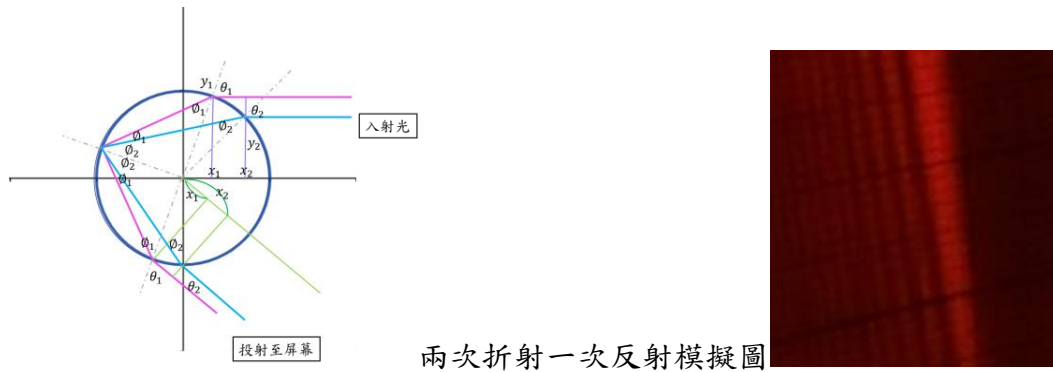


(四) 在後屏幕(半圓形屏幕)的實驗中，距離水滴中心的角約42度到51度會出現亞歷山大暗帶，與理論相符。

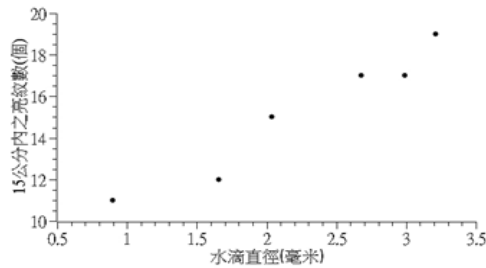




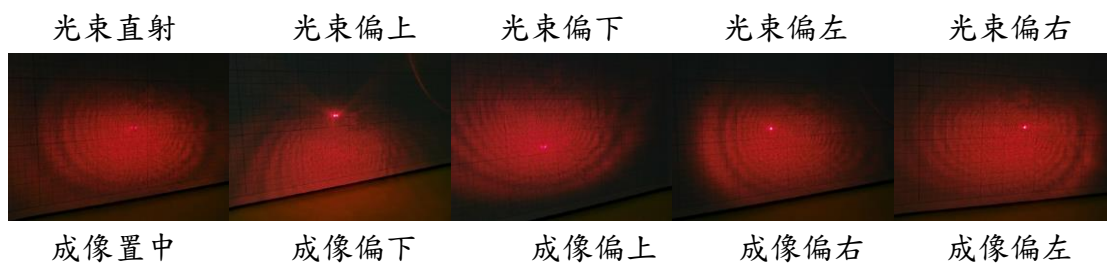
(五) 當光程差 ( $x_1 - x_2$ ) 為波長的整數倍時即為完全建設性干涉也就是亮紋, 若為半波長的奇數倍時, 即為完全破壞性干涉也就是暗紋



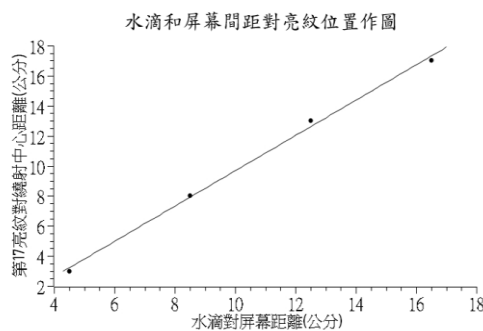
(六) 實驗一水滴直徑間距對15公分內亮紋數作圖結果得知：水滴的直徑與特定距離內亮紋數成正相關。水滴的直徑越大，其成像波紋間距越小，單位距離間之亮紋數增加，繞射條紋越密。此結果與我們於理論探討的結論相同。



(七) 實驗二得知：雷射光束偏移方位與成像繞射條紋的中心偏移方位相反，因產生繞射的光束通過水滴內折射，成倒立實像。



(八) 實驗三得知：2.657 mm的水滴其第17條亮紋與繞射中心距離(y)與水滴和屏幕間距(x)關係式為  $y = 1.175x - 2.0875$ , y節距僅約2公分，若調整實驗誤差會與理論中正比的結果更相符合。



## 二、研究展望與限制

- (一) 不同色光波長不盡相同(紅光 $>$ 藍光)，因而推測若使用藍光，則亮紋密度會相較使用紅光時上升。
- (二) 改變溶液折射率，將會影響成像的角度，其亞歷山大暗帶也會有所不同
- (三) 可加以與彩虹成像概念相互比較。其相似處於都是光進入水與空氣交界面所產生的結果，不同處在於霓虹的產生是由遠方的太陽光照進無數多個微小水珠因而產生分光作用；上述的干涉條紋則是由同調光源綠光雷射照



# Brilliant Pattern

Reporter: 郭志玲、黃巧璇、呂侑臻

National Changhua Girls' Senior High School

2021

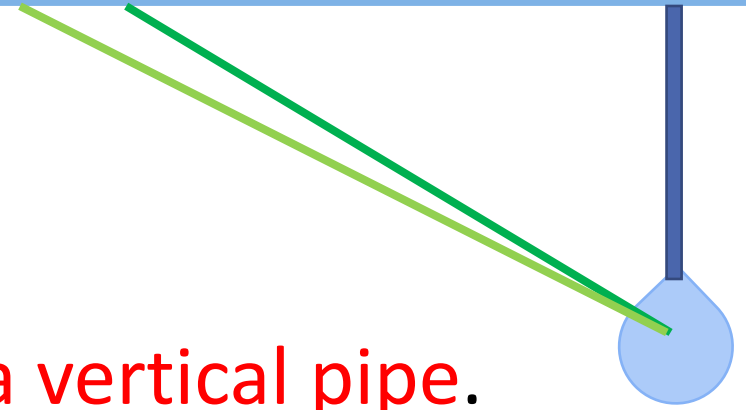




# Problem Statement

Suspend a water drop at the lower **end of a vertical pipe**.

**Illuminate the drop** using a **laser** pointer and observe the **pattern** created on a screen.



Main focus :

1. lower end of a vertical pipe
2. illuminate the drop by laser pointer
3. observe the pattern created on a screen



# Outline

- Phenomenon Observation
- Analysis
- Experiments & Discussion
- Conclusion



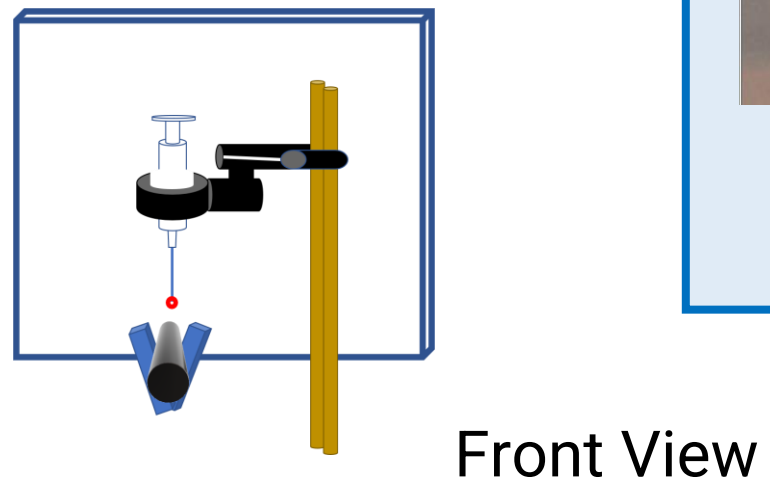
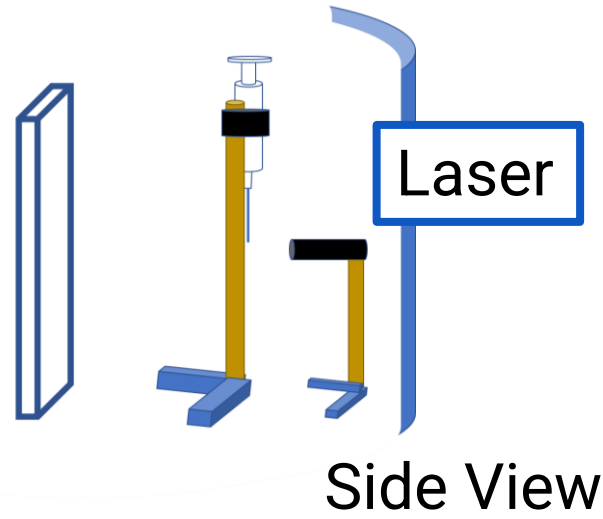
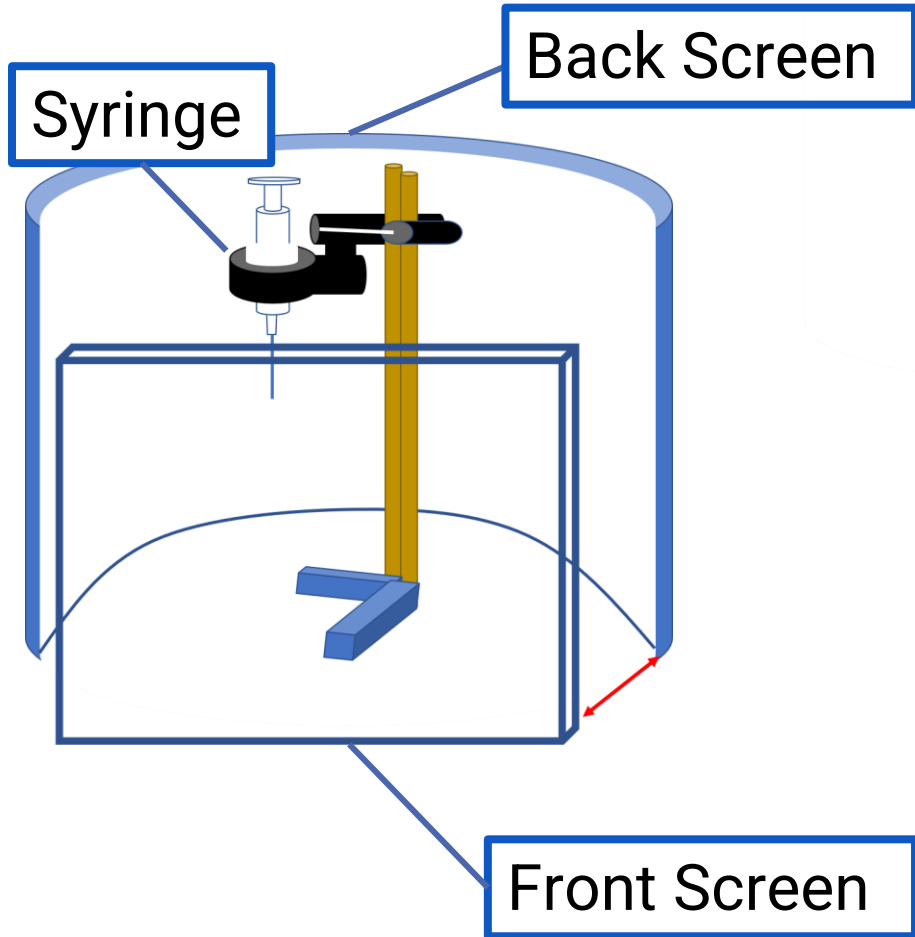
---

# Phenomenon Observation



# Observation

## Experimental Setup

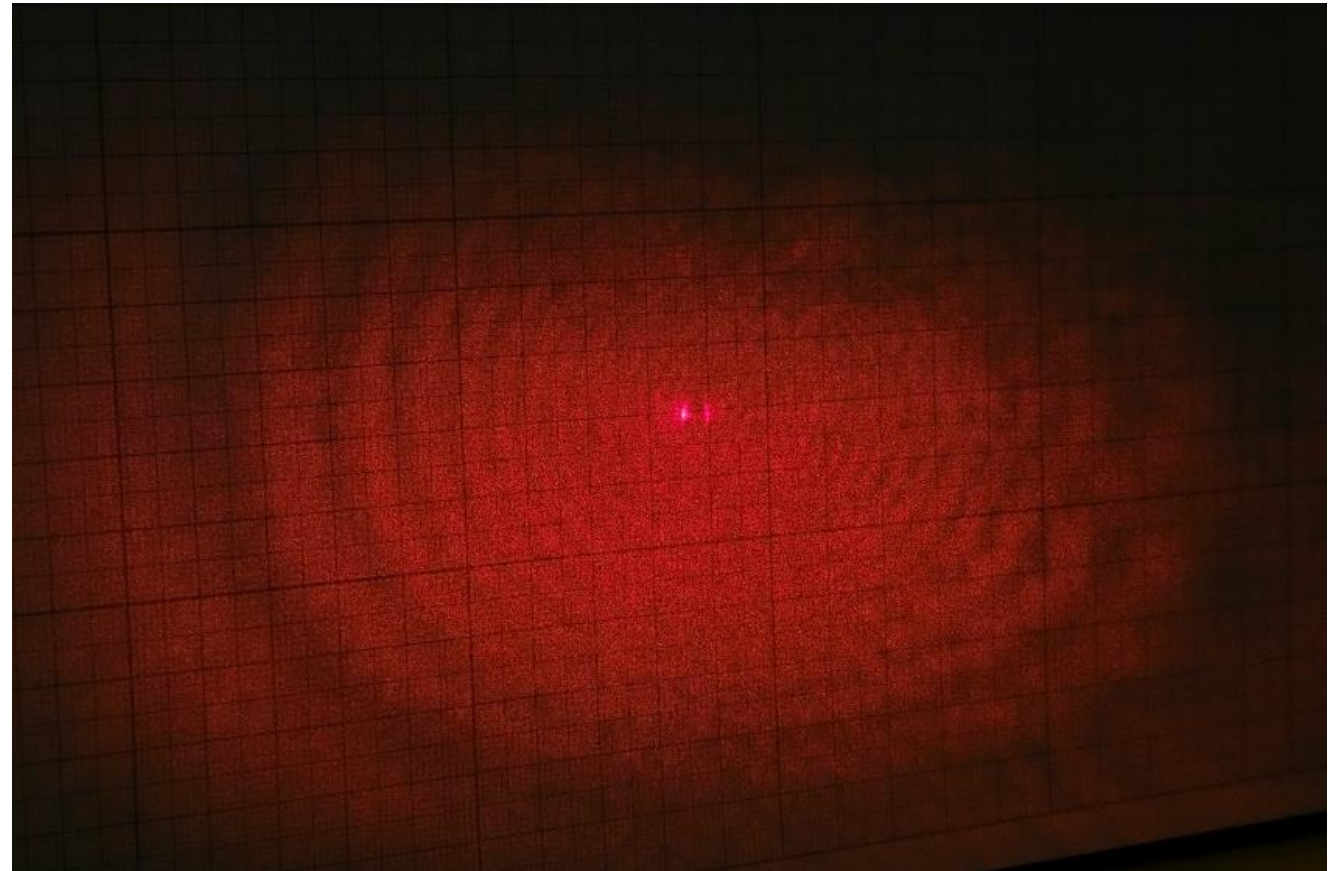
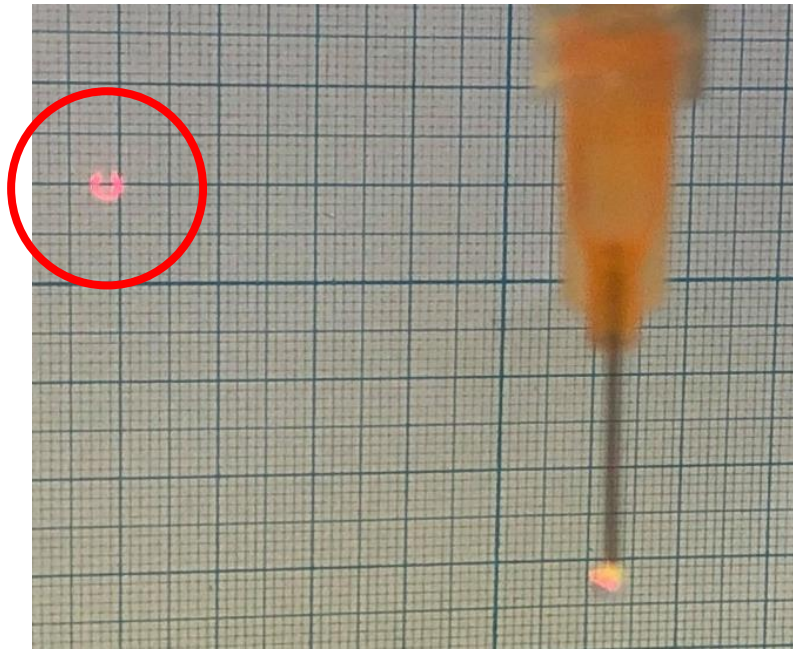


### Measurement: ImageJ

A screenshot of the ImageJ software interface. The main window shows a photograph of a red droplet on a surface. A red line is drawn across the droplet. A 'Set Scale' dialog box is open, showing the following values: Distance in pixels: 20, Known distance: 0.51, Pixel aspect ratio: 1.0, and Unit of length: mm. Below the dialog, a 'Plot of 13' window shows a line graph of Gray Value versus Distance (pixels). The graph shows a noisy signal that fluctuates between approximately 40 and 140 gray values over a distance of 0 to 1400 pixels. The scale of the plot is 39.215.



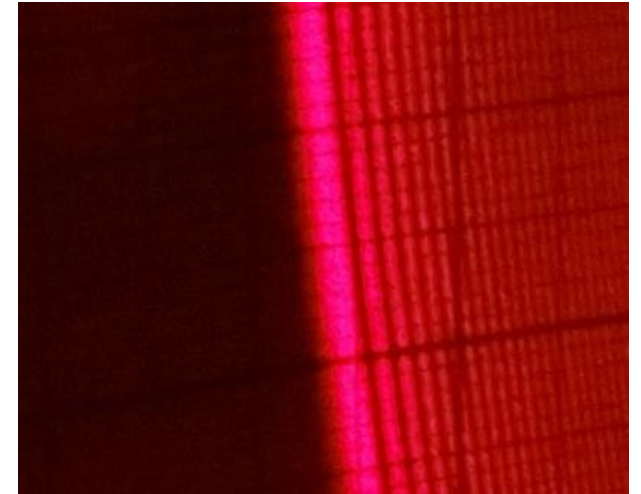
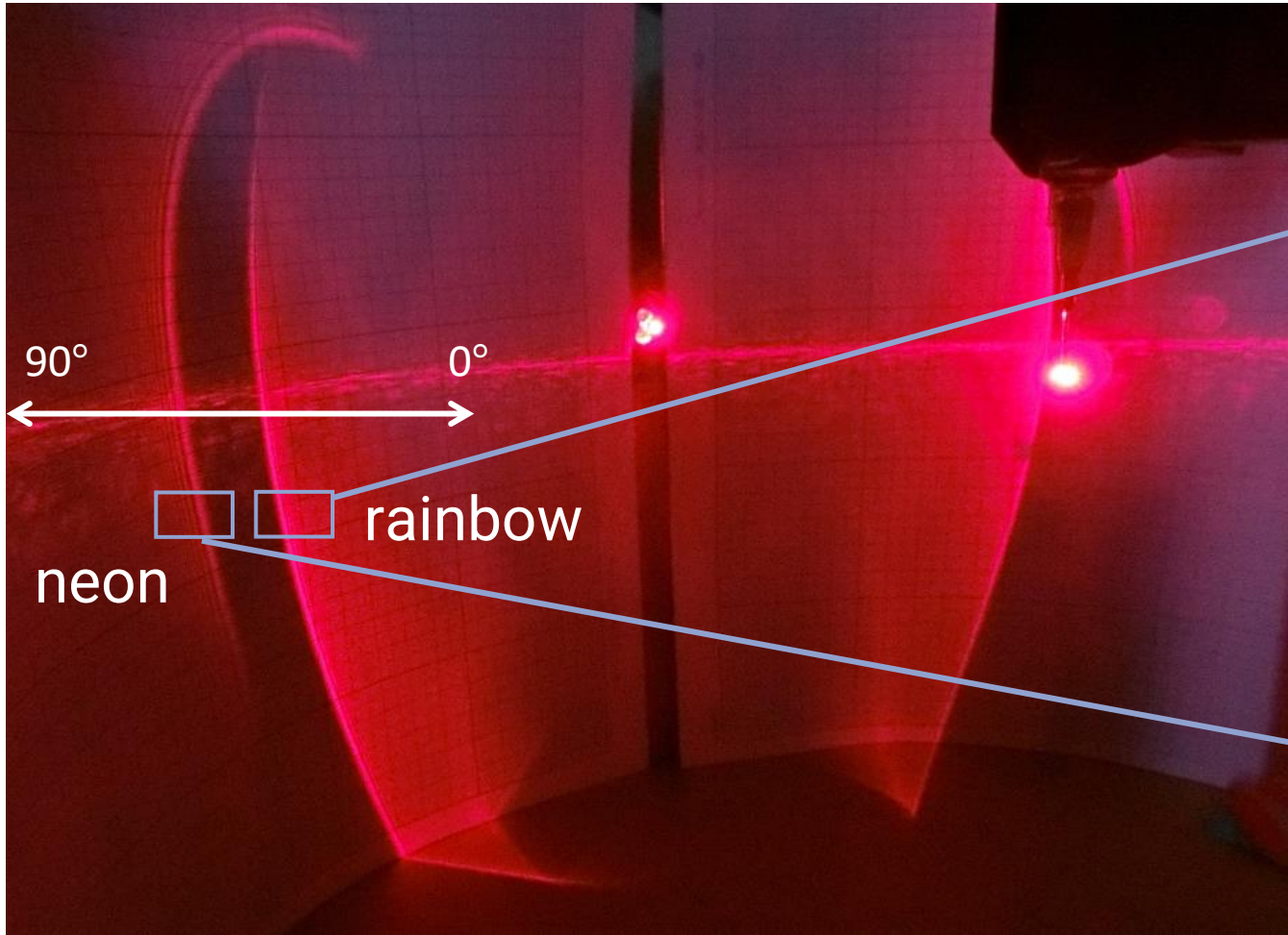
# Observation–Front Screen







# Observation-Back Screen





---

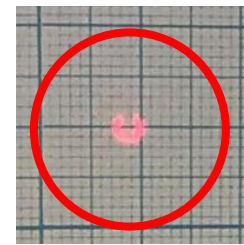
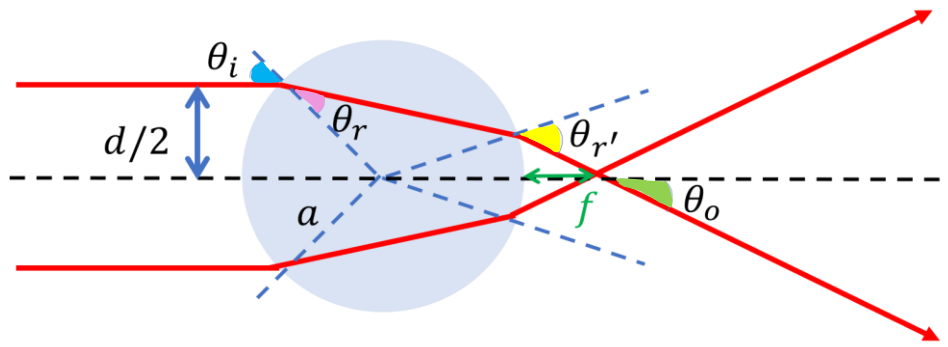
# Analysis



# Refraction

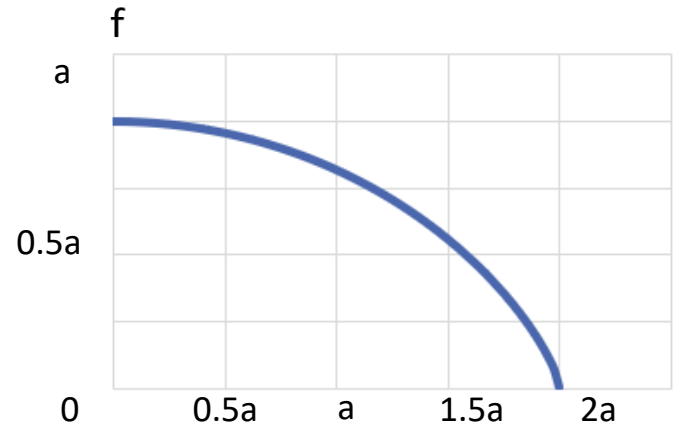
## Analysis

Front



Laser penetrates directly

Relationship between position of laser and focal position

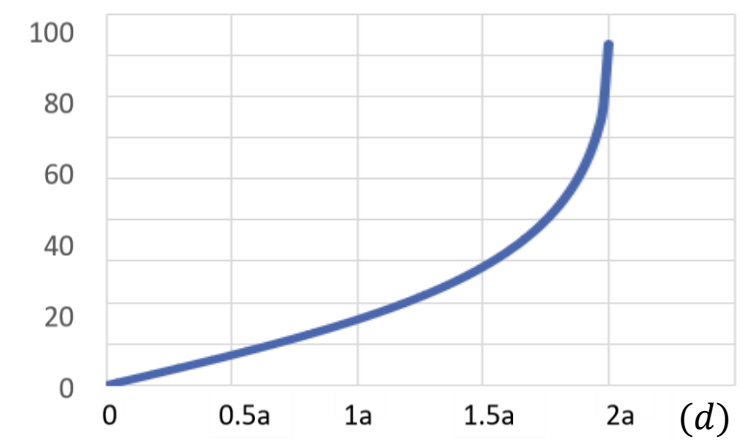


$$d \uparrow \Rightarrow f \downarrow$$

$$\sin \theta_i = d/2a$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \theta : \text{angle} \\ n : \text{refraction Index}$$

Relationship between position of laser and divergence angle (°)



- Drop radius :  $a$
- Laser beam diameter :  $d$
- Angle of incidence of light from air into drop :  $\theta_i$
- Angle of refraction of light from air into drop :  $\theta_r$
- Angle of refraction of light from drop into air :  $\theta_r'$
- Divergence half-angle :  $\theta_o$

$$\theta_o = 2(\theta_i - \theta_r)$$

$$f = a \left[ \cos(2\theta_r - \theta_i) + \frac{\sin(2\theta_r - \theta_i)}{\tan(2\theta_i - 2\theta_r)} - 1 \right]$$

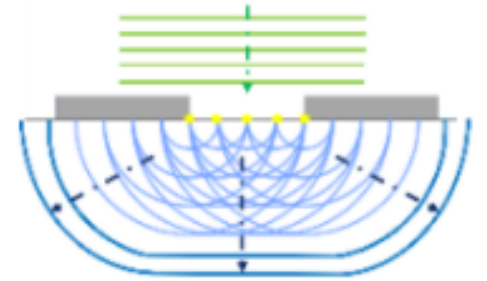
$$d \uparrow \Rightarrow \theta_o \uparrow$$

Refraction Index of Water : 1.33



# Huygens–Fresnel principle

Each point of the wavefront emits secondary waves, which interfere with each other and superimpose to form a new wavefront



Fresnel Number :

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^2}{L\lambda}$$

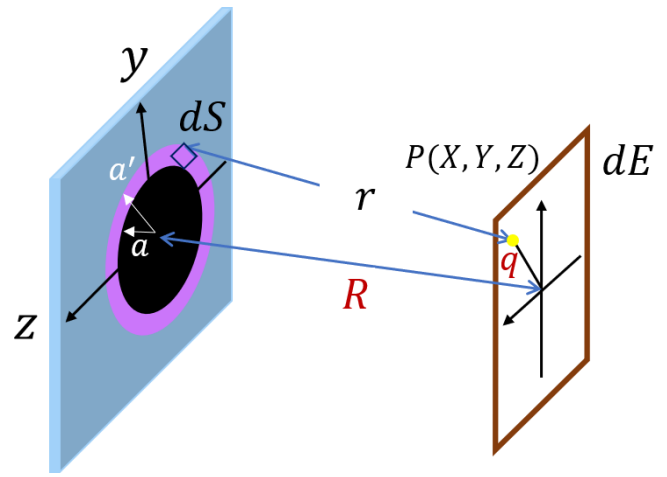
$a$  : Size of the aperture radius  
 $L$  : Distance between aperture and screen  
 $\lambda$  : Wavelength of the incident wave

$$dE = \frac{\epsilon_A}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS$$

$$\Rightarrow E = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \iint_{\text{out of aperture}} e^{ik(Yy + Zz)/R} dS$$

Smaller droplets  
 → Sparser Diffraction fringes

$F \ll 1 \rightarrow$  Far-field diffraction  
 $\rightarrow$  Fraunhofer diffraction



$$E \simeq \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} 2\pi (a' - a) J_0\left(\frac{k a q}{R}\right)$$

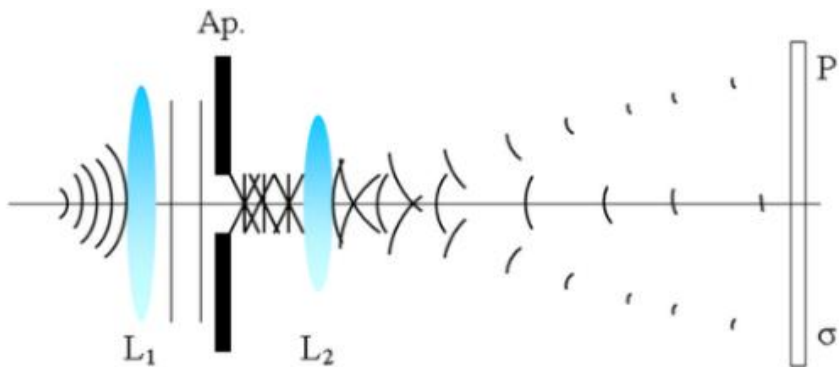
$$I = \frac{2\epsilon_A^2 \pi (a' - a)^2}{R^2} [J_0(k a q / R)]^2$$

- $a$  : Diameter of droplet
- $a' \sim a$  : Area of diffraction
- $E$  : Electronic field
- $I$  : Brightness
- $\epsilon_A$  : Brightness of unit area
- $\omega$  : angular frequency  $\rightarrow 2\pi f$
- $k$  : number of waves  $\rightarrow \frac{\lambda}{2\pi}$
- $R$  :  $[X^2 + Y^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}}$



# Fraunhofer diffraction

- $d$  : Slit distance
- $\theta$  : Angle of incidence
- $n$  :  $n^{\text{th}}$  stripe
- $\lambda$  : Incident light wavelength

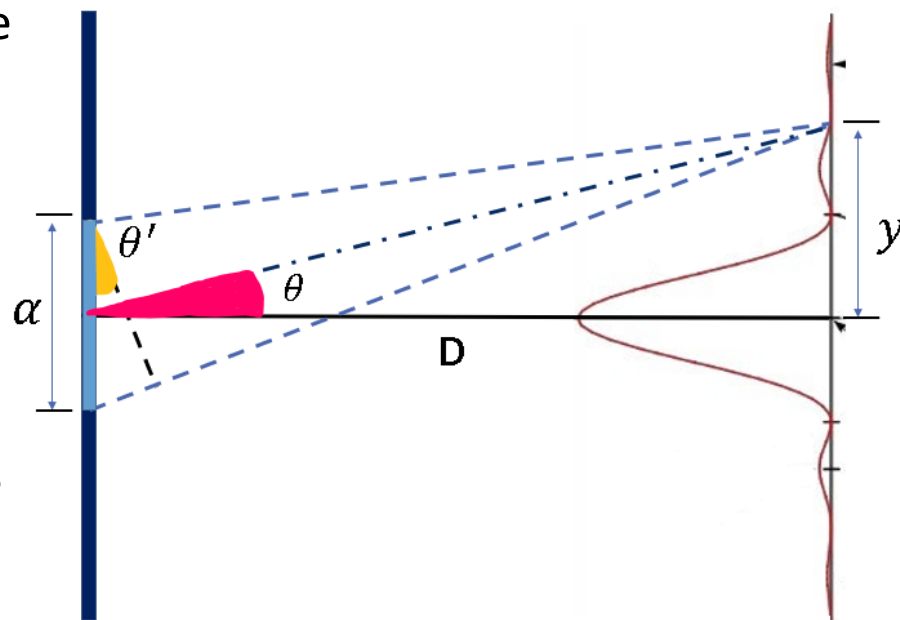


$$d \sin \theta = n\lambda$$

$$\tan \theta = \frac{y}{D}$$

$$\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta \approx \frac{y}{D}$$

Assumption of infinite source distance gives plane wave at slit so that all amplitude elements are in phase.



For  $D \gg a$   
This approaches a right angle  
and  $\theta' \approx \theta$

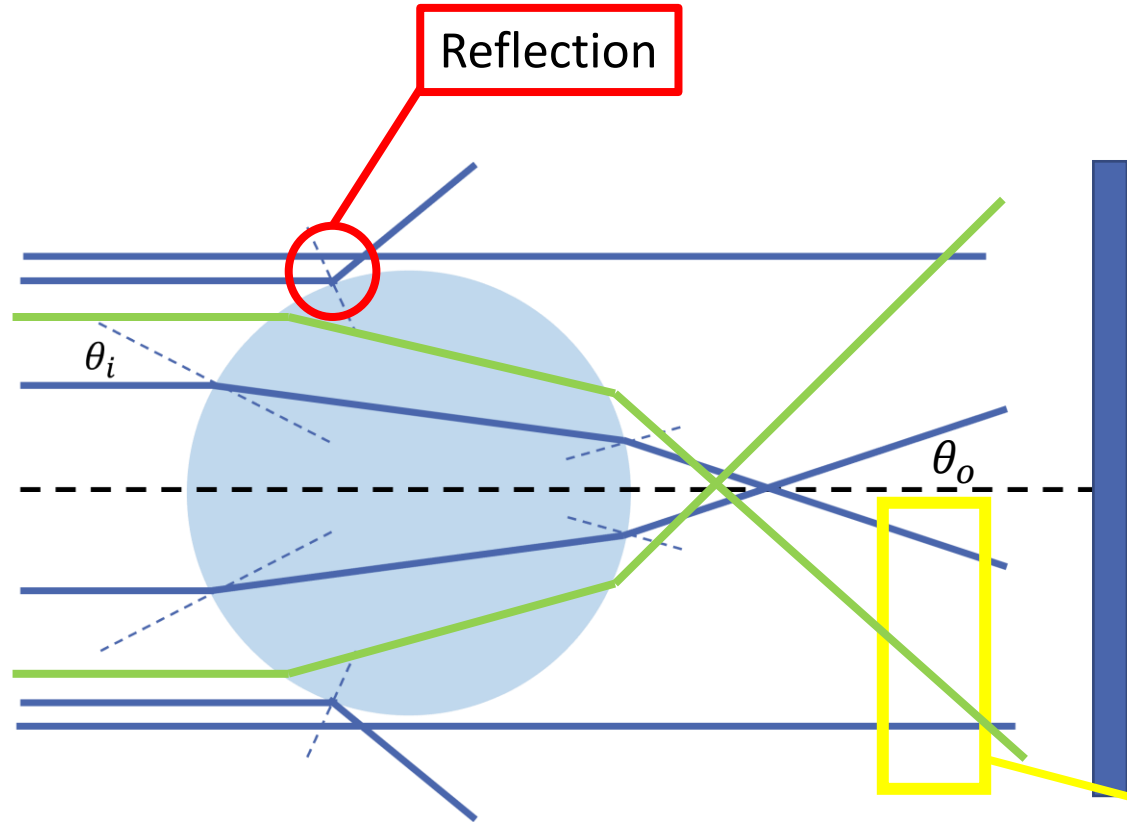
Condition for minimum

$$a \sin \theta = m\lambda$$

$$y = \frac{m\lambda D}{a}$$



# Refraction & Interference



Reflection

Interference

$y$  : Distance from center  
 $n$  : Ripples  
 $L$  : Distance between drop and screen  
 $\lambda$  : Wavelength  
 $d$  : The slit is wide

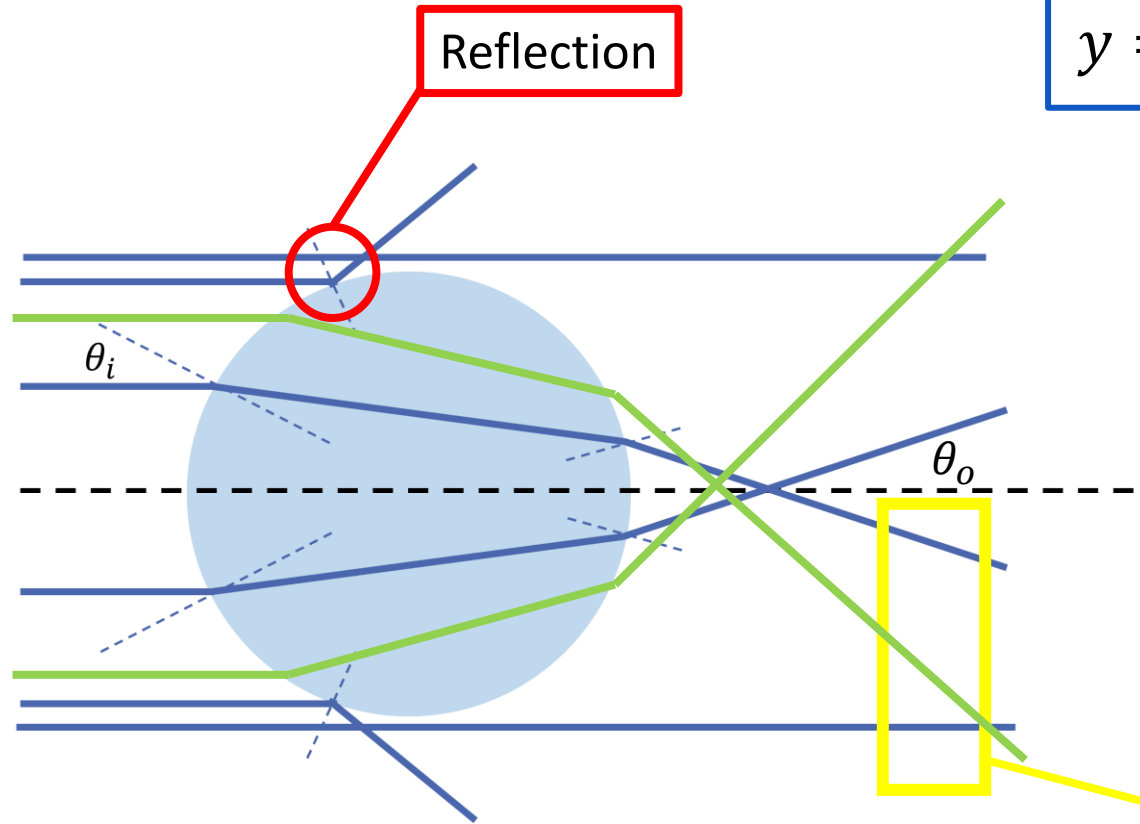
$$y = \frac{nL\lambda}{d}$$

Distance ↓  
 → density of **fringes** ↑

The distance between the aperture and the projection is different  
 → Diffraction patterns are reduced or enlarged



# Refraction & Interference



Reflection

$$y = \frac{nL\lambda}{d}$$

$y$  : Distance from center  
 $n$  : Ripples  
 $L$  : Distance between drop and screen  
 $\lambda$  : Wavelength  
 $d$  : The slit is wide

Distance ↓  
 → density of **fringes** ↑

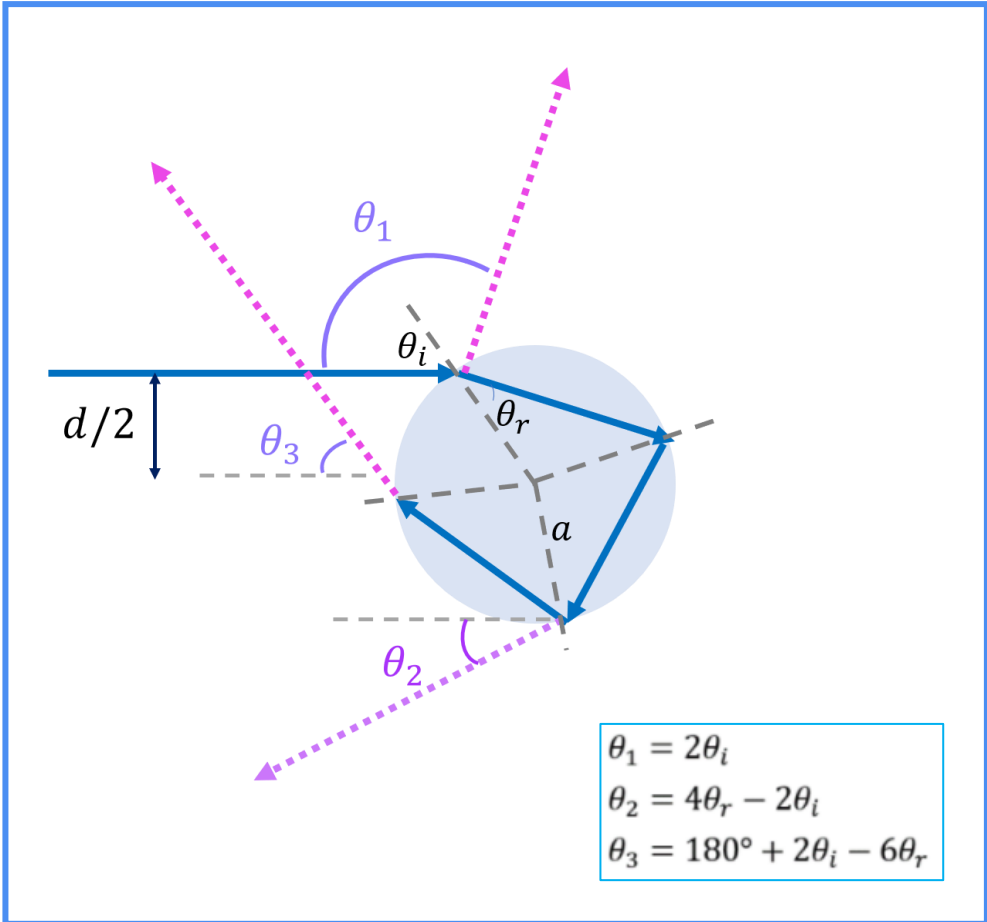
Interference

The distance between the aperture and the projection is different  
 → Diffraction patterns are reduced or enlarged



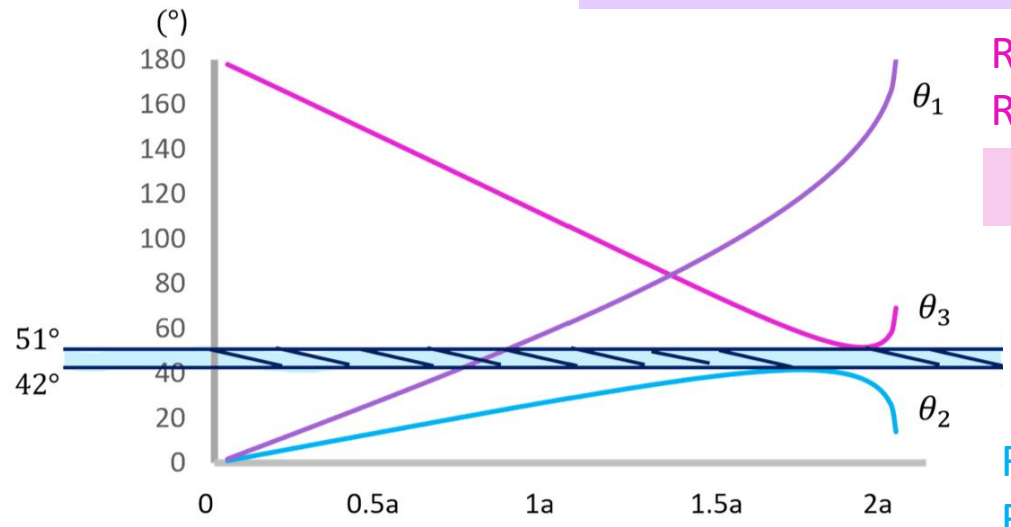


# Multiple Reflections & Refractions



Angle of incidence of light from air into drop :  $\theta_i$   
 Angle of refraction of light from air into drop :  $\theta_r$

Reflect once  
 Distance to the center of droplet ↓  
 → Reflection Angle ↓



Reflect twice & Refract twice

180° ~ 51°

Neon

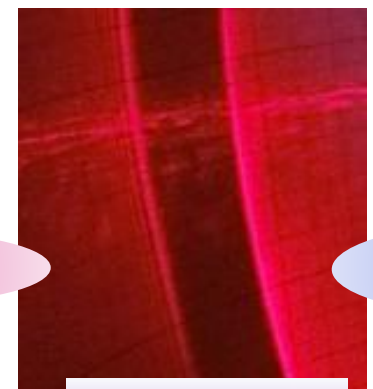
Alexander's dark band

Reflect once & Refract twice

0° ~ 42°

Rainbow

Neon



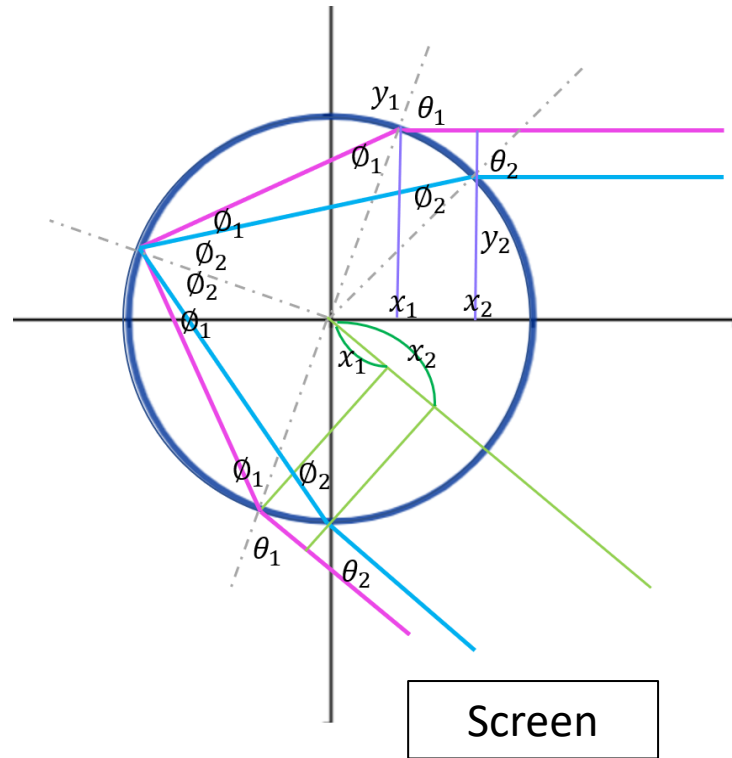
Rainbow

Alexander's dark band





# Interference fringes → volatility of light



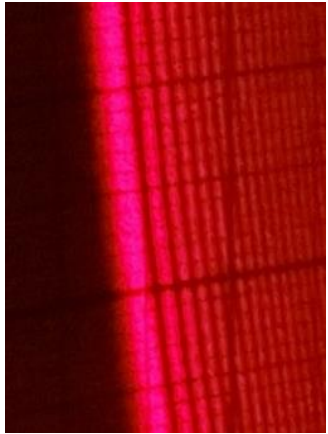
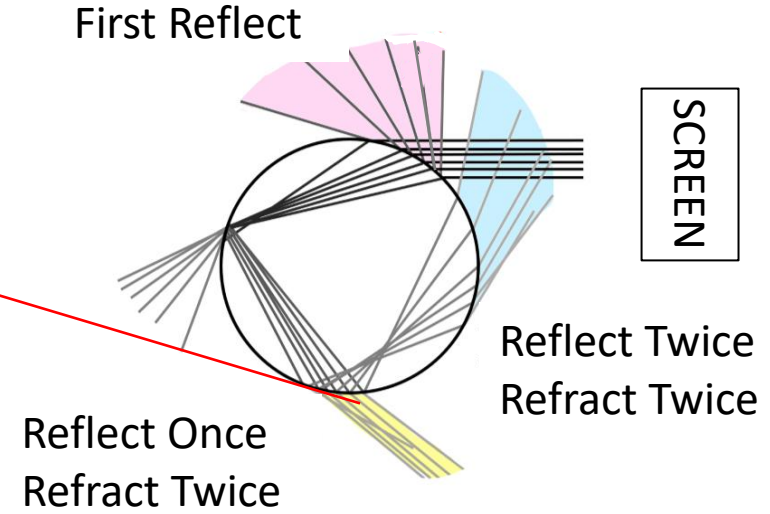
incident light

Screen

Simulation diagram of one reflection and two refractions

Two light amplitudes are linearly superimposed.

- Pre-incident path difference :  $x_2 - x_1 = r(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$
- Emission path difference :  $2r(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) + 1.33 \times 4r (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)$
- Optical path difference
  1. Integer multiple of the wavelength  
→ Complete constructive interference → Glossy lines
  2. Odd multiples of half a wavelength  
→ Totally destructive interference → Dark lines





---

# Experiments & Discussion



## Experimental Parameter

1. Diameter of droplets

0.898 mm /1.658 mm /2.036 mm /2.675 mm /2.990 mm/ 3.211 mm

2. Offset orientation of the laser beam

direct / up / down / left / right

3. Distance between droplet and Screen

16.5 cm /12.5 cm /8.5 cm /4.5 cm



# Experiments and discussions

## Parameter 1 - Diameter of droplets

Color of laser light : red  
 Distance between drop and screen : 16.5 cm  
 Laser light shoots directly into the center of the drop.

3.211 mm

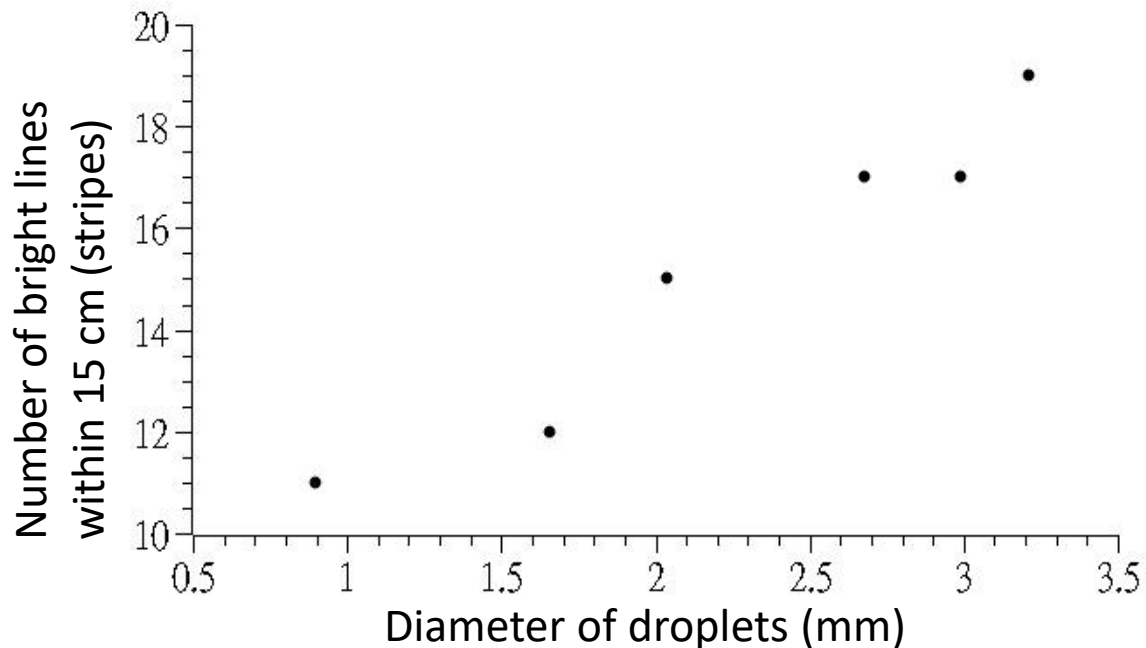
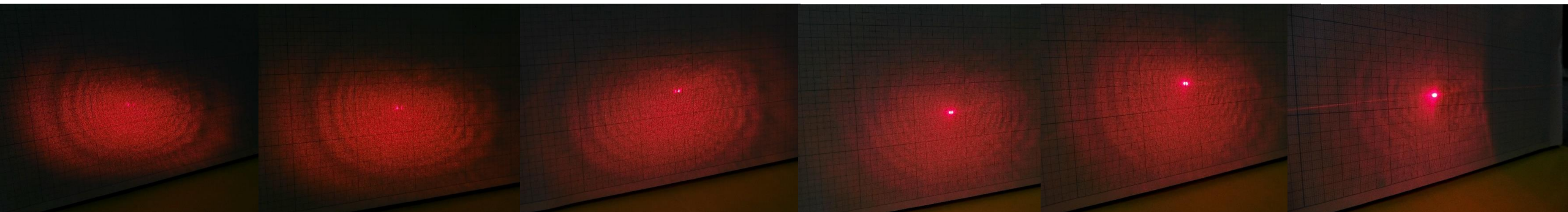
2.990 mm

2.675 mm

2.036 mm

1.658 mm

0.898 mm



The larger the diameter of the drop  
 ↓  
 The larger the difference between laser beam and the diameter of drop ( $a' - a$ )  
 ↓  
 The higher the density of the imaging ripples

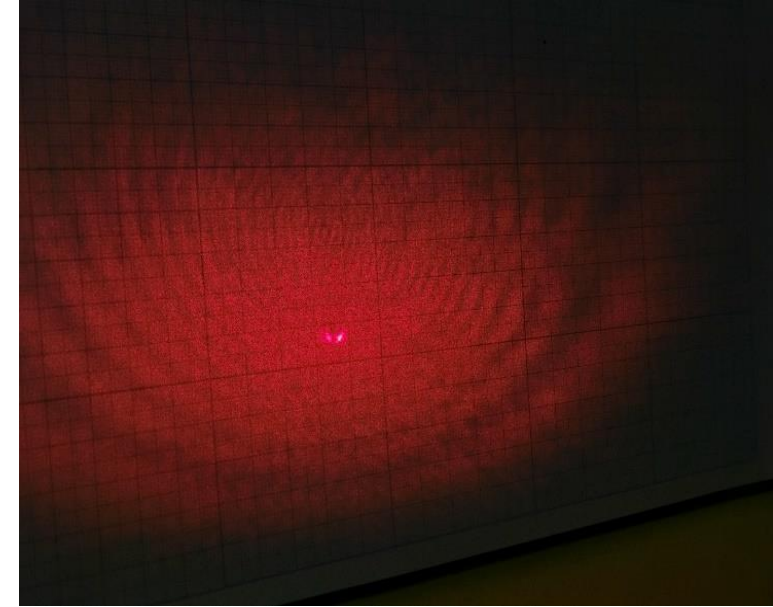
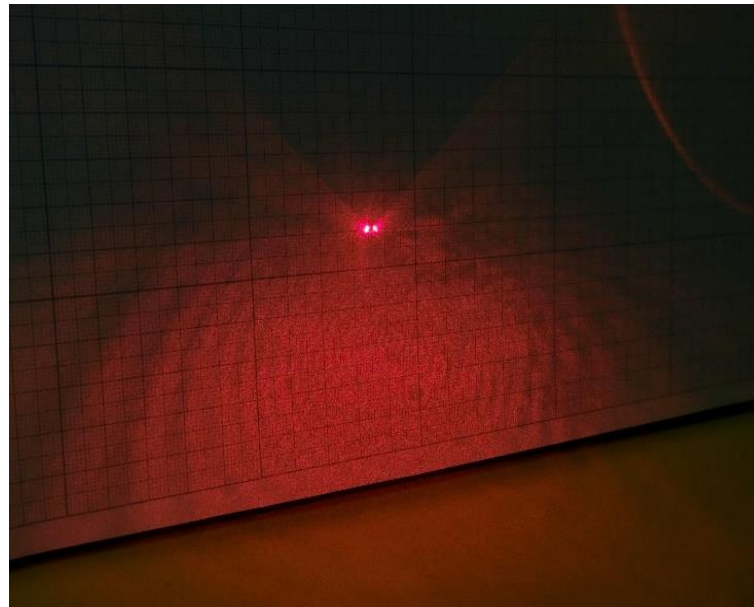
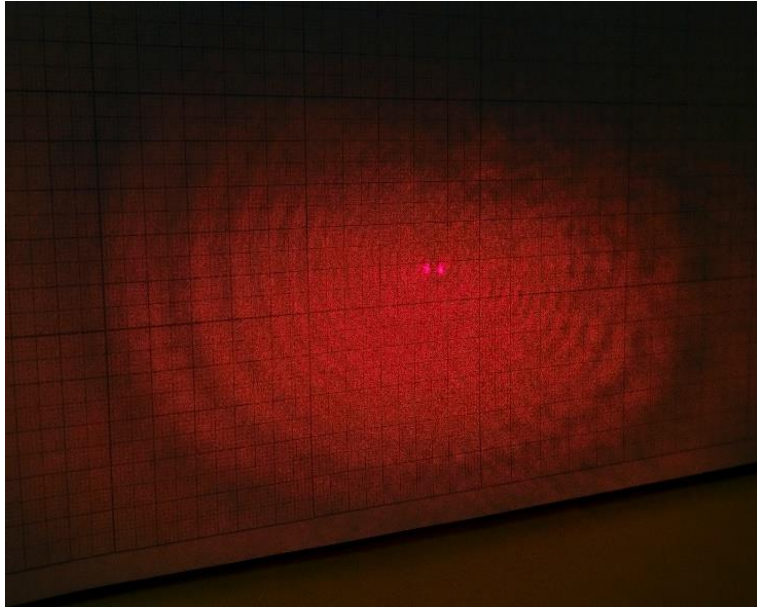


# Experiments and discussions

Color of laser light : red  
Distance between drop and screen : 16.5 cm  
Diameter of drop : 2.511 mm

## Parameter 2 -Distance of offset

The relationship between the center of Interference fringes and bright light.



Laser beam

shoot directly

deflect upwards

deflect downwards

Center

overlap

below the light

above the light



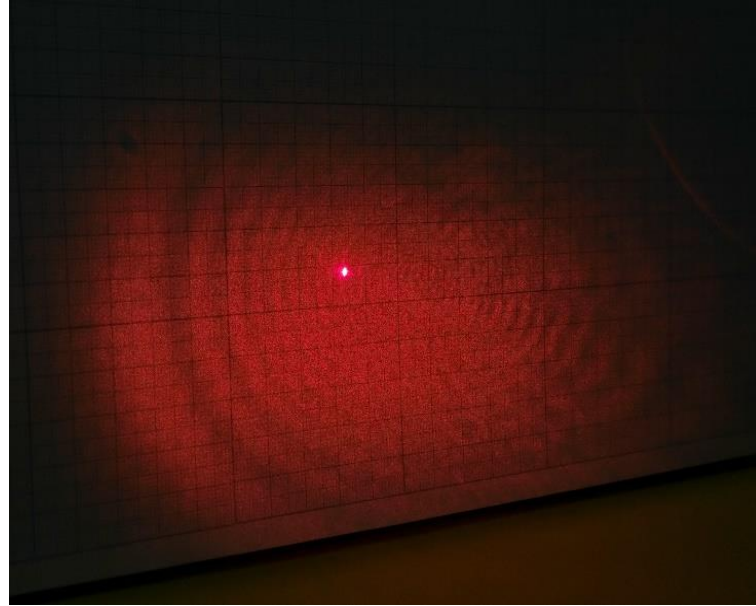


# Experiments and discussions

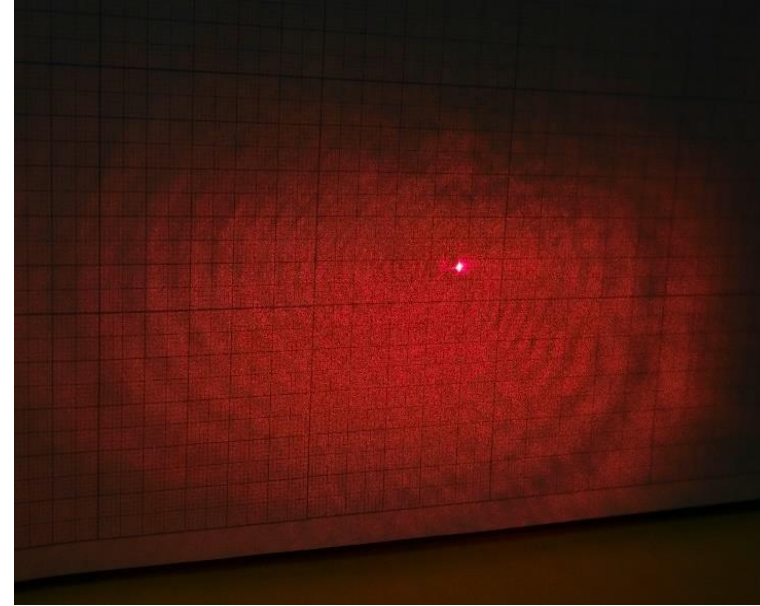
Color of laser light : red  
Distance between drop and screen : 16.5 cm  
Diameter of drop : 2.511 mm

## Parameter 2 -Distance of offset

The relationship between the center of Interference fringes and bright light.



left



right

Laser beam

Center

on the right of the light

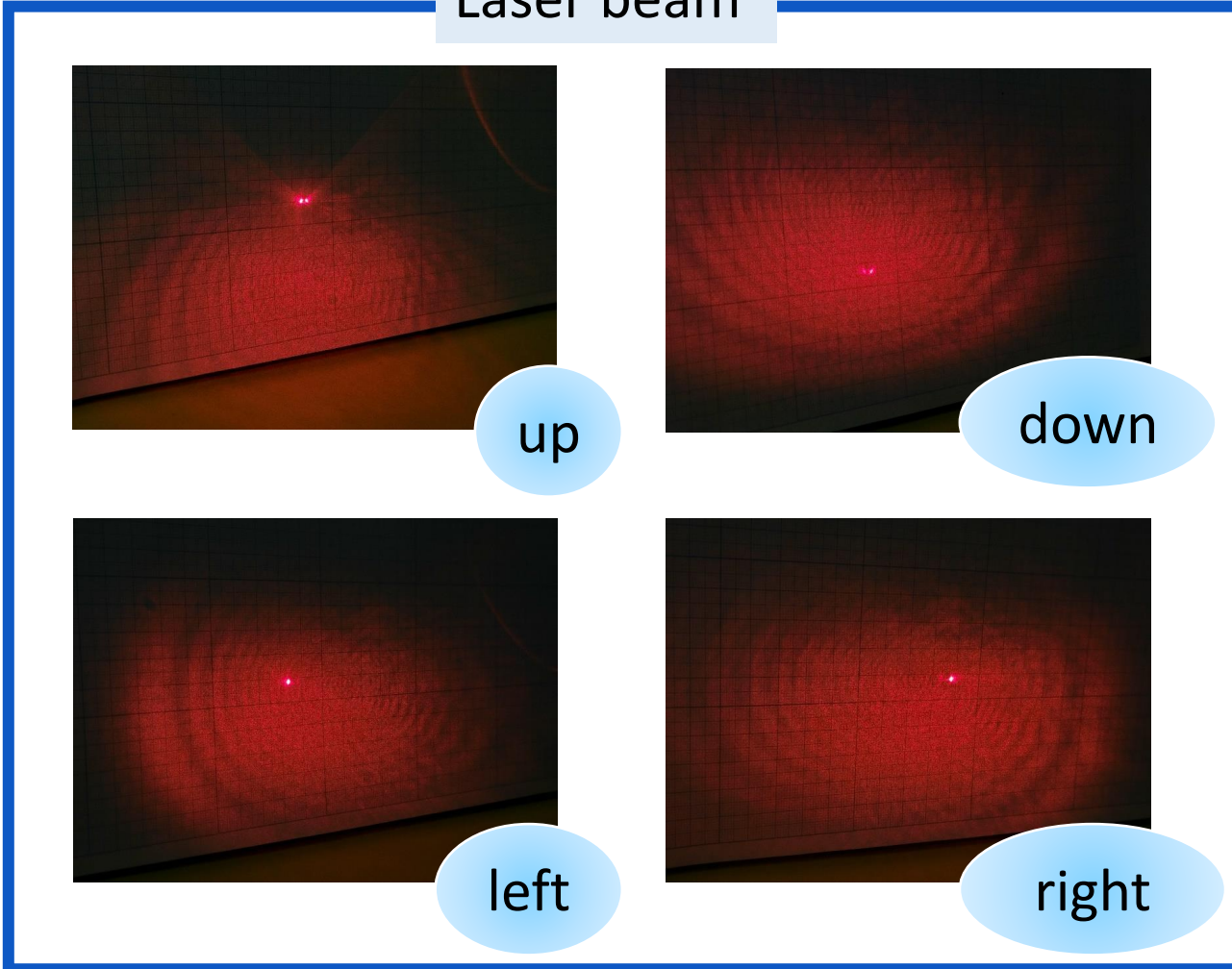
on the left of the light

# Experiments and discussions

## Parameter 2 - Distance of offset

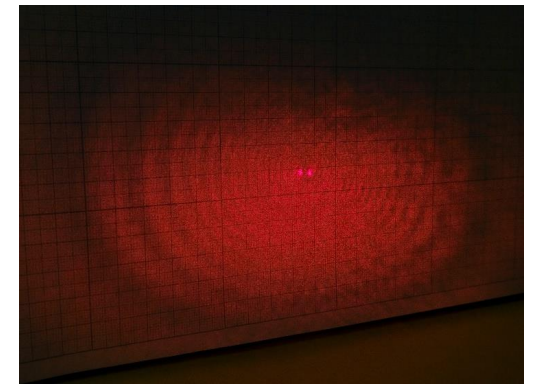
Color of laser light : red  
Distance between drop and screen : 16.5 cm  
Diameter of drop : 2.511 mm

Laser beam



Laser beam offset direction and diffraction offset direction : reverse

$\therefore$  Refraction  $\rightarrow$  Inverted real image

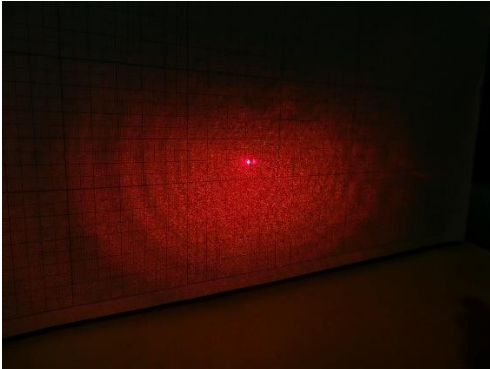


# Experiments and discussions

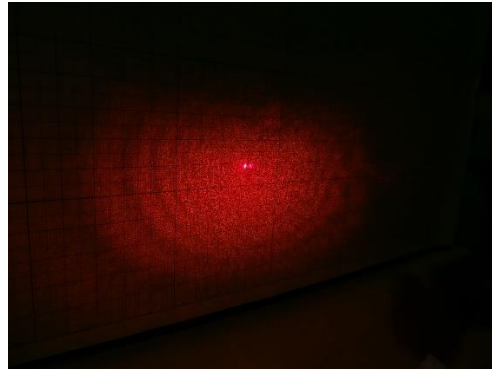
Color of laser light : red  
Diameter of drop : 2.675 mm  
Laser light shoots directly into the center of the drop.

## Parameter 3 -Distance between drop and screen

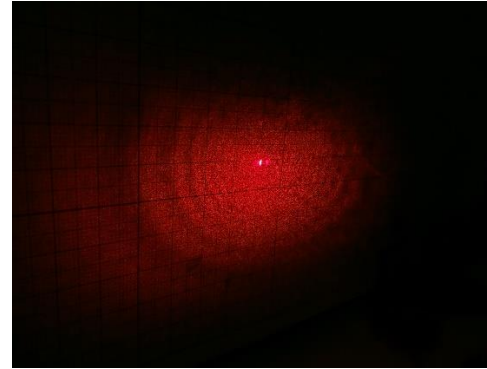
16.5 cm



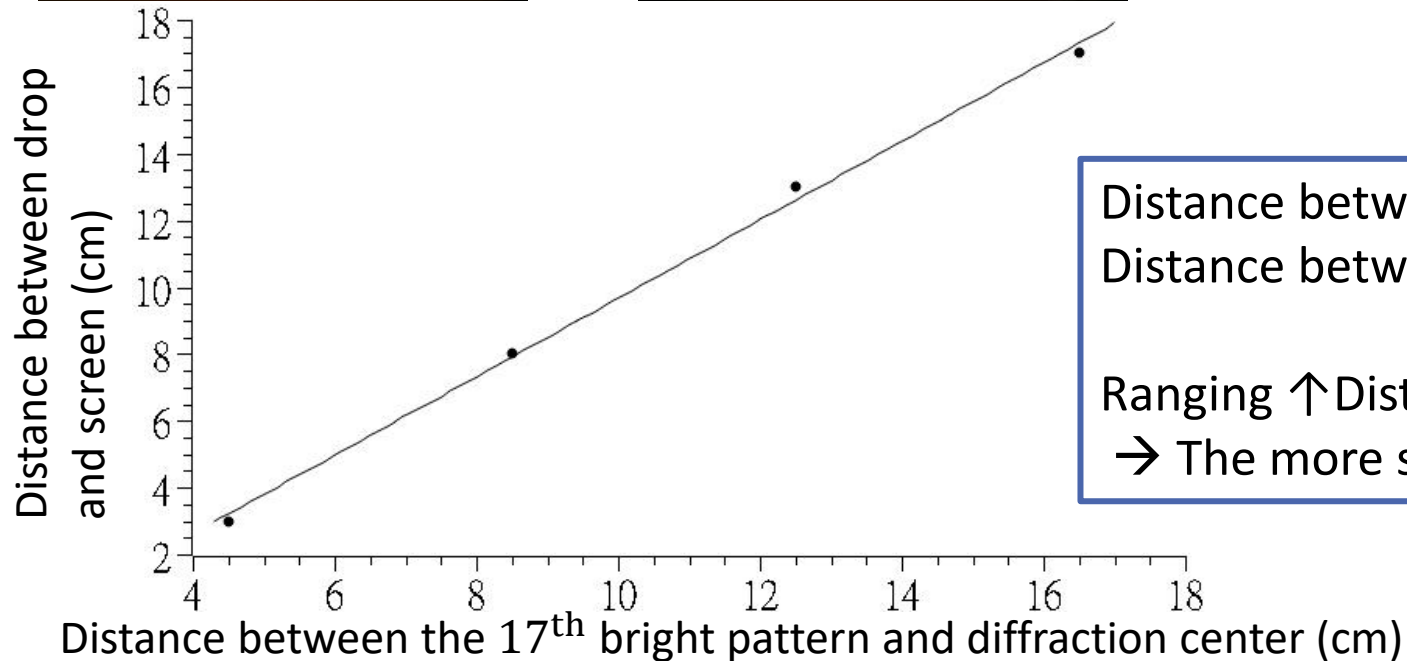
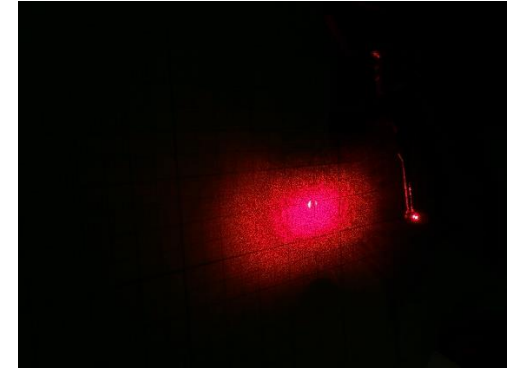
12.5 cm



8.5 cm



4.5 cm



Distance between drop and screen ( $x$ )  $\propto$   
Distance between specific light line and diffraction center ( $y$ )

Ranging  $\uparrow$  Distance  $\uparrow$   
 $\rightarrow$  The more sparse the image ripple density





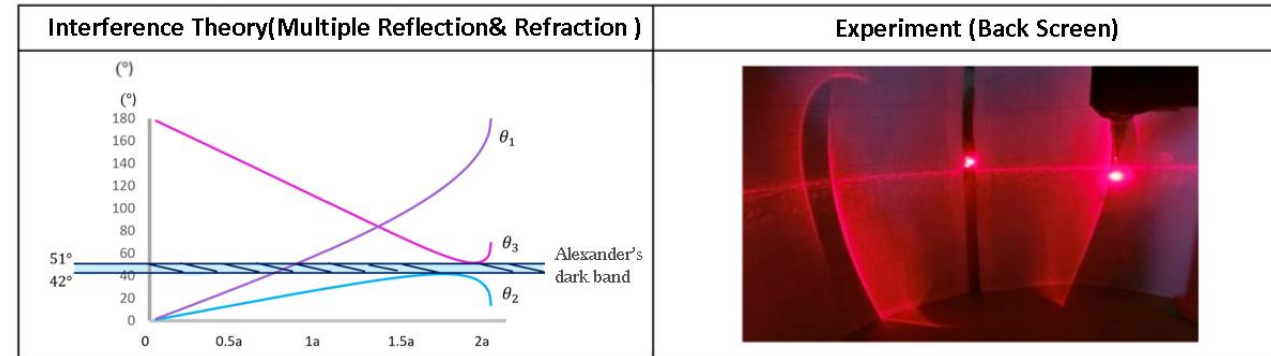
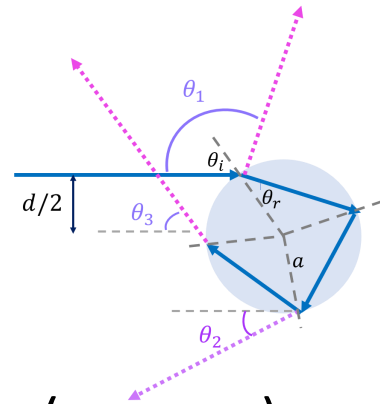
# Error analysis of experiments and theories

1. Spherical-based theoretical model → add correction factor correction
2. Deformation of drop caused by the environment → experiments in confined spaces
3. Overexposure → appropriate laser light intensity
4. Deviation of Laser injection point → The result of parameter 2 can be used as the basis for the confirmation of the incident point
5. Bright streak calculation error → Measure luminosity changes with ImageJ to confirm position
6. Bright streak spacing boundary definition → Measure luminosity changes with ImageJ to confirm position

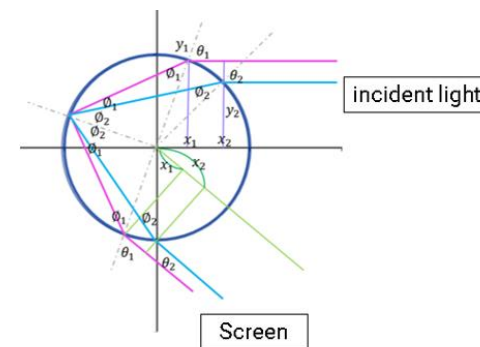


# Conclusion

1. Imaging principles : Reflection 、 Refraction 、 Interference 、 Diffraction
2. Alexander dark band will appear at an angle of about 42 to 51 degrees from the center of the water droplet.



1. Optical path difference ( $x_1 - x_2$ )
  - a. Integer multiple of the wavelength
    - Complete constructive interference
    - Glossy lines
  - b. Odd multiples of half a wavelength
    - Totally destructive interference
    - Dark lines



Theory: Simulation Diagram of one reflection and two fraction

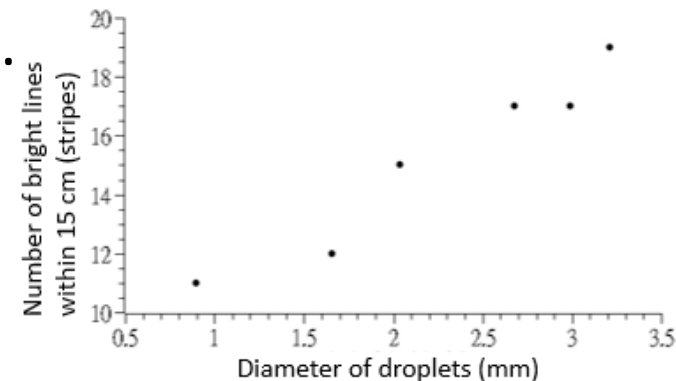


Experimental Result



4. Experiment 1 : The diameter of the water droplets is positively related to the number of bright streaks within a certain distance.

- The larger the diameter of the drop, the smaller the distance between the ripples.
- The number of bright lines per unit distance increases, and the diffraction fringes are denser.



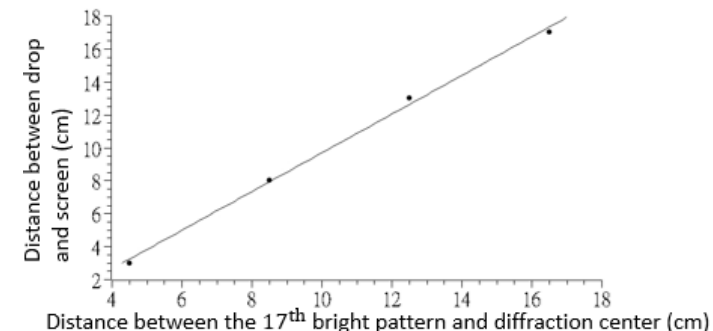
5. Experiment 2 : Laser beam offset direction is opposite to diffraction offset direction.

- Because of refraction, an inverted real image is formed.

Laser beam	shoot directly	up	down	left	right
Center	overlap	down	up	right	left

6. Experiment 3 : Distance between drop and screen ( $x$ )  $\propto$  Distance between specific light line and diffraction center ( $y$ )

- Ranging  $\uparrow$ Distance  $\uparrow$   
 $\rightarrow$  The more sparse the image ripple density





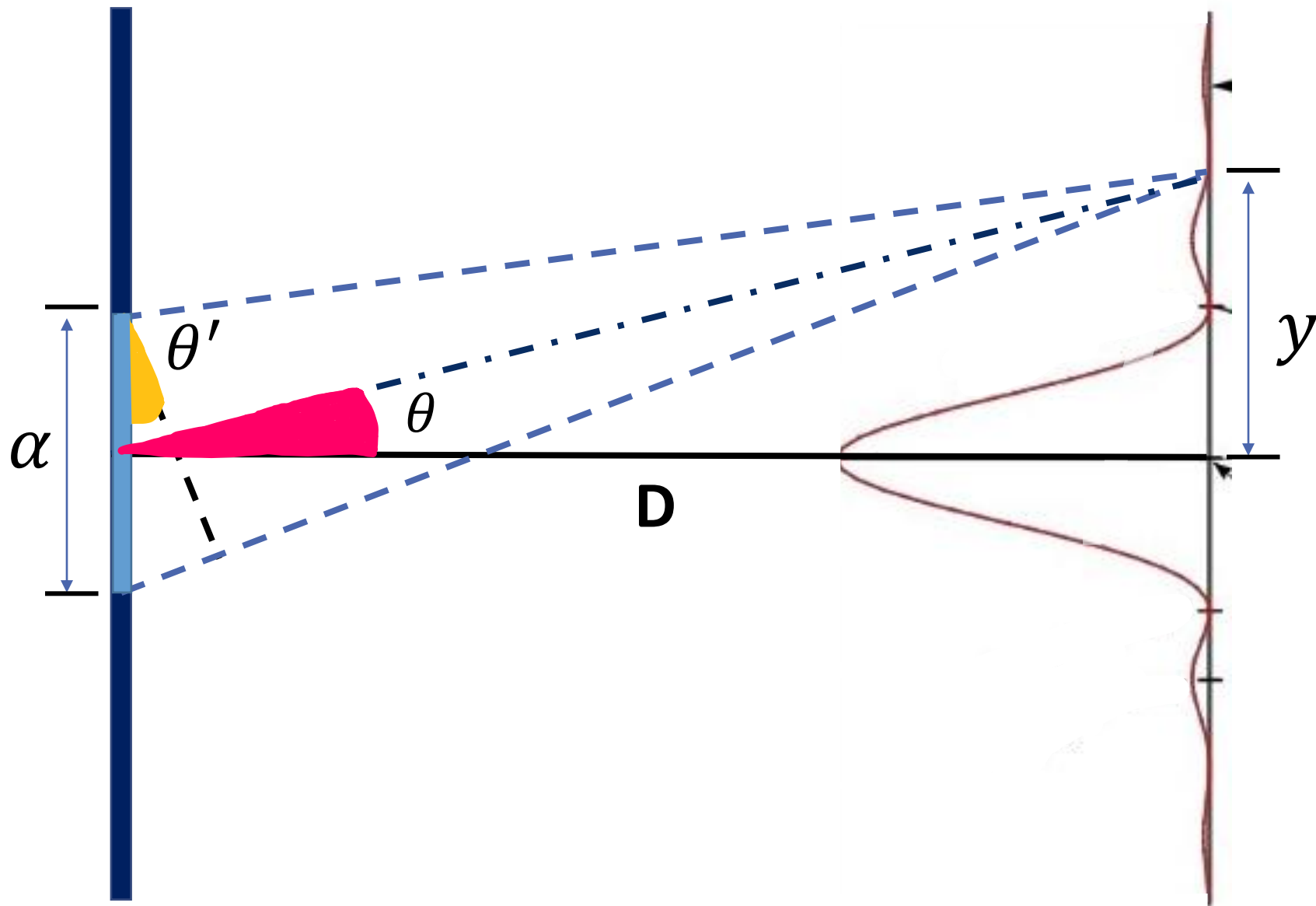
# Thank you for your attention

Reporter : 郭志玲、黃巧璇、呂侑臻

National Changhua Girls' Senior High School

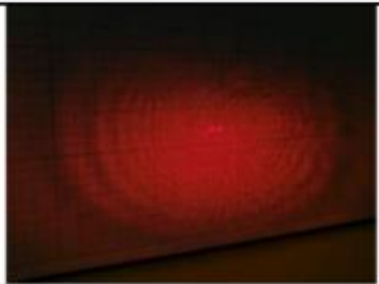
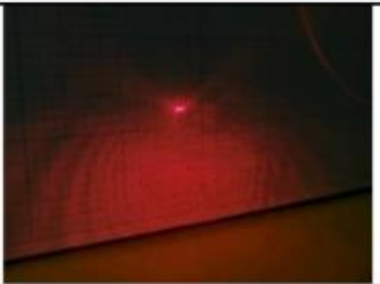
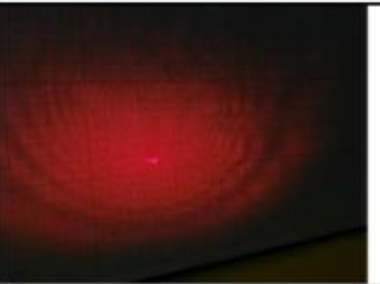
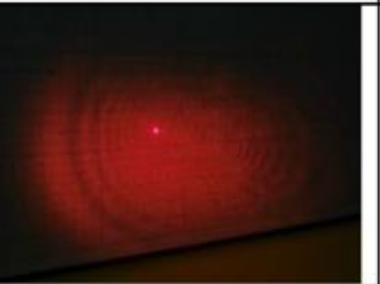
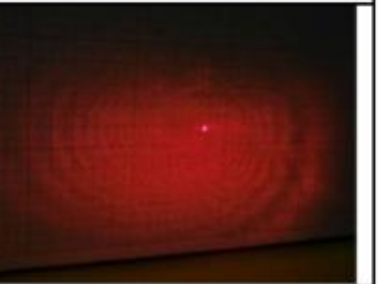
2021







Laser beam

	shoot directly	up	down	left	right
					
Center	overlap	down	up	right	left